**30èmes Journées internationales**
**d'Économie Monétaire, Bancaire et Financière**

**Poitiers, 27/28 juin 2013**

# Construction de portefeuille : recherche d'une cohérence entre le risque stratégique et le risque actif

**Alexis FLAGEOLLET**
Ingénieur financier Sénior
Natixis Asset Management
Alexis.Flageollet@am.natixis.com

**Franck NICOLAS**
Directeur Investment & Client Solutions
Natixis Asset Management
Franck.Nicolas@am.natixis.com

Le degré moyen de gestion active que l'on introduit dans un portefeuille est-il fonction de l'allocation stratégique? À première vue cela n'est pas indispensable. Pourtant, un investisseur dont l'allocation stratégique est défensive, et qui correspond de fait à un horizon plus court, devrait normalement posséder une gestion plus passive[1]. En effet, si son allocation d'actifs est prudente, c'est qu'il ne souhaite pas endurer de pertes trop importantes. Il n'y a alors aucune raison pour qu'une gestion active trop agressive le remette en situation de perte potentielle importante. À l'inverse, un investisseur plus dynamique, avec plus de temps devant lui aura une allocation d'actifs plus risquée et pourra de fait assumer un risque actif de gestion proportionnel.

La théorie financière répond assez mal au risque que peut endurer un investisseur. En particulier, aucune liaison n'est faite entre le risque stratégique, le risque tactique et le risque de gestion à l'intérieur d'une classe d'actif (ou risque de sélection). Nous proposons ici une approche qui réconcilie les trois concepts en recherchant une cohérence d'ensemble. Cette démarche permet de construire un portefeuille en définissant des marges de manœuvres de gestion qui soient cohérentes au regard du niveau de risque global qu'un investisseur est prêt à prendre.

[1] Depuis quelques années, certains investisseurs institutionnels pratiquent l'approche inverse. Ils confient davantage de budget à la gestion très active lorsque la visibilité de marché se réduit et qu'ils comptent davantage sur la performance de gérant plus que sur le directionnel. Inversement, lorsque le directionnel devient plus attractif, leur portefeuille redeviennent plus passifs au fur et à mesure que le mix d'actifs devient plus agressif. Mais on ne peut plus seulement parler de stratégique ici. En fait la réduction du risque marché en faveur du risque gérant dans les marchés baissiers et vice-versa est déjà un acte tactique qui peut se faire à risque actif global inchangé par rapport à une allocation stratégique de long terme. C'est juste le *downside risk* global qui devient plus sensible au gérant en phase baissière et plus sensible au marché en phase haussière sur les actifs risqués.

## I/ Fonction d'utilité dans la théorie des choix d'investissement

La théorie des choix d'investissement décrit un processus de sélection de portefeuille dans lequel l'investisseur devra choisir entre plusieurs solutions suivant son objectif d'investissement. Le premier enjeu d'une stratégie d'investissement est donc de bien identifier l'objectif recherché. Généralement, une fonction d'utilité aide les agents économiques à classer leurs préférences entre plusieurs solutions en rapport avec le bien être qu'elles apportent.

Pour un portefeuille donné, on estime en général que l'investisseur cherchera à maximiser l'utilité qu'il obtiendra de la richesse accumulée d'un portefeuille. Par conséquent, la fonction d'utilité se présente souvent avec une dérivée première positive et une dérivée seconde négative. En effet, l'utilité est :

- Croissante : l'utilité d'un portefeuille s'accroît avec sa richesse. C'est élément est fondamental pour justifier qu'un supplément de richesse contribuera positivement à l'accroissement de l'utilité. C'est le concept d'utilité marginale, qui indique que le gain d'utilité est impacté positivement par un supplément de richesse.
- Concave : l'accroissement de l'utilité diminuera avec la valeur du portefeuille. C'est le principe de satiété d'un agent économique qui intervient au fur et à mesure que la valeur d'un portefeuille s'apprécie.

Dans le concret, la plupart des fonctions d'utilité utilisée par les praticiens sont quadratiques. Cette fonction prend la forme suivante :

$$U(X) = X - \lambda.X^2$$

Cette fonction est croissante pour chaque valeur de la richesse comprise sur un intervalle : $\left[0, \dfrac{1}{2.\lambda}\right]$.

Le coefficient de risque absolu est également une fonction croissante de la richesse avec :

$$\lambda(X) = \frac{2.\lambda}{1 - 2.\lambda.X}$$

Cette fonction d'utilité est particulièrement intéressante car elle donne accès à un raisonnement moyenne – variance[2], dans lequel un investisseur maximisera sa richesse attendue en basant son choix sur la variance anticipée des rendements. En conséquence, l'investisseur tentera de maximiser son utilité $U$ en fonction de deux paramètres, l'espérance de rendement qui agit positivement sur l'utilité et la variance des rendements, qui agit négativement sur $U$. Le programme d'investissement devient alors :

- Maximiser le rendement attendu pour un certain niveau de variance des rendements
- Minimiser la variance d'un portefeuille pour un certain niveau de rendement.

[2] Cela donne également accès au concept de Value-at-Risk (VaR), qui quantifie le risqué maximum pour une période donnée avec un certain niveau de confiance. Ar exemple, la VaR 99% à un an d'un investissement se définit comme : $VaR = \mu - 1{,}96.\sigma$ ; tandis que la VaR 95% sera : $VaR = \mu - 1.64.\sigma$ (dans le cas gaussien).

Avec : $\mu$, le rendement d'un portefeuille et $\sigma$, l'écart-typed'un portefeuille.

Si un investisseur décide d'allouer entre des actions et des obligations, son utilité espérée deviendra : $E(U) = \mu_S.W_S + \mu_B.W_B - \lambda.\left(\sigma_S^2.W_S^2 + \sigma_B^2.W_B^2 + 2.\rho.\sigma_S.W_S.\sigma_B.W_B\right)$

Avec :

$\mu_S$ : rendement attendu des actions

$\mu_B$ : rendement attendu des obligations

$W_S$ : poids des actions dans l'allocation

$W_B$ : poids des obligations dans l'allocation

$\sigma_S$ : écart-type du rendement des actions

$\sigma_B$ : écart-type du rendement des obligations

$\rho$ : corrélation entre les actions et les obligations

$\lambda$ : coefficient d'aversion au risque

Il est alors possible d'écrire la dérivée partielle de l'utilité espérée, qui représente le changement d'utilité généré par une unité supplémentaire d'actions ou d'obligations dans l'allocation d'actifs. Les dérivées partielles par rapport aux actions et aux obligations s'écrivent respectivement :

$$\begin{cases} \partial E(U)/\partial W_S = \mu_S - \lambda.\left(\sigma_S^2.W_S + 2.\rho.\sigma_S.\sigma_B.W_B\right) \\ \partial E(U)/\partial W_B = \mu_B - \lambda.\left(\sigma_B^2.W_B + 2.\rho.\sigma_S.W_S.\sigma_B\right) \end{cases}$$

Si nous égalisons ces deux dérivées, cela conduit à une aversion au risque implicite qui est une fonction des rendements attendus, des écart-types des rendements, de la corrélation entre les actions et les obligations et de l'allocation d'actifs de l'investisseur.

$$\lambda = \frac{(\mu_S - \mu_B)}{\left(2.\sigma_S^2.W_S + 2.\rho.\sigma_S.\sigma_B.W_B - 2.\sigma_B^2.W_B - 2.\rho.\sigma_S.W_S.\sigma_B\right)}$$

Typiquement, c'est ici le problème principal posé par ces approches. En effet :

- D'une part, cette fonction d'utilité ne prend pas en compte l'asymétrie possible dans la distribution des actifs. Dans la réalité, un investisseur préférera un actif avec moins d'asymétrie pour une variance identique[3].
- Ensuite, le coefficient d'aversion au risque $\lambda$, dépend lui-même de l'allocation d'actifs. Cela implique que le coefficient ne puisse être connu que lorsque l'allocation est définie, ou, qu'inversement, l'allocation d'actif ne puisse se définir que lorsque ce coefficient est définit. Or, la définition de $\lambda$ est précisément ce qui pose problème.

L'approche proposée ci-après visera donc à sortir d'une démarche classique pour définir un niveau d'aversion pour le risque qui traitera, à la fois de l'allocation stratégique, du niveau de risque actif par rapport à cette allocation stratégique toléré par le coefficient, et de la répartition entre actifs core et satellite que l'on peut supporter sur un portefeuille.

[3] Ceci est aussi une limite des logiques en VaR dans le cadre de rendements gaussiens.

## II/ Définition de l'intolérance pour le risque

Pour pouvoir se mettre en situation de gestion de portefeuille, nous définissons une référence de gestion qui peut être un benchmark. Dans le concret, s'il s'agit de définir l'allocation stratégique d'un investisseur, ce benchmark peut être une allocation stratégique naïve (par exemple équilibrée en capital ou en risque entre plusieurs classes d'actifs) de laquelle on va dévier en fonction de la plus ou moins grande aversion pour le risque (ou du plus ou moins d'appétit pour le risque) d'un investisseur.

Ainsi, posons $B$ la performance du benchmark et $P$ la performance du portefeuille stratégique. $\tilde{P}$ représente à la performance relative, soit $\tilde{P} = P - B$.

Soit $N$ le nombre d'actifs composant le portefeuille. $r_i$ et $w_i$ sont respectivement le rendement de l'actif $i$ et son poids dans le portefeuille $P$. Soit $\overline{w}_i$ le poids de l'actif $i$ dans le benchmark $B$.

On pose $w_i = \overline{w}_i + \Delta w_i$, qui sont les déviations actives du portefeuilles par rapport au benchmark.

On a $\sum_{i=1}^{N} w_i = \sum_{i=1}^{N} \overline{w}_i = 1$. Donc $\sum_{i=1}^{N} \Delta w_i = 0$.

Nous posons :
$H$ : un horizon d'investissement[4]
$R \approx N\left(m \times dt), \Sigma \times dt\right)$ : les log-rendements de $N$ actifs observés à une fréquence relativement courte[5]
$m$ : le vecteur des log-rendements annualisés espérés
$\Sigma$ : la matrice de variances/covariances annualisées.

Si on suppose une richesse initiale unitaire, alors, soient $P^H$ et $1 + P^H$, respectivement le rendement et la richesse finale atteinte à l'horizon[6] $H$, on obtient :

$$E(1 + P^H) = \exp\left[ H.\left( m_w + \frac{\sigma_w^2}{2} \right) \right]$$

et $\sigma(1 + P^H) = E(1 + P^H).\sqrt{\exp(H.\sigma_w^2) - 1}$

---

[4] Nous nous situerons ici dans un horizon d'investissent supérieur à une année. De ce fait, l'hypothèse de loi normale n'est plus tenable compte tenu du caractère géométrique des rendements sur le long terme. Une loi log-normale est une hypothèse plus réaliste.

[5] dt = (1 / nombre de périodes par an)
Si la fréquence de rebalancement du portefeuille est assez courte alors le log-rendement du portefeuille est gaussien d'espérance $m_w = w' m$ et $\sigma_w^2 = w' \sum w$.

[6] DE LA GRANDVILLE, O. - "The Long-Term Expected Rate of Return : Setting it Right", Financial Analysts Journal, November/December 1998, pp. 75-80.

Pour identifier le profil de risque d'un investisseur, nous choisissons de déterminer l'allocation et l'aversion pour le risque qui maximise la diversification du portefeuille sous contrainte de perte absolue. Cette allocation sera à la fois bien diversifiée et respectera un seuil statistique de performance en-dessous du quel un investisseur ne veut pas descendre sur un horizon donné.

Une fois $m$ et $\sum$ fixés, nous cherchons l'allocation qui permet d'espérer obtenir à X%, un rendement à l'horizon $H$ d'au moins égal à un seuil de souffrance d'un investisseur $S^H$. Ce seuil de souffrance correspondra à la perte statistique qu'un investisseur sera prêt à assumer sur un horizon de temps donné et avec un intervalle de confiance donné, correspondant à la probabilité que cet événement se réalise.

On appelle $S^H$ le seuil de souffrance de l'investisseur[7], et on peut alors écrire :

$$\Pr\left[100\% + P^H \leq 100\% + S^H\right] \geq X\%$$

Si nous travaillons à $X\%$ d'intervalle de confiance par exemple, il est alors possible[8] d'écrire que :

$$E(1+P^H) - Q_{X\%}.\sigma(1+P^H) = 1 + S^H$$

Avec : $$Q_{X\%} = \frac{1-\exp\left[N_{X\%}.\sqrt{H}.\sigma_w - 1/2.H.\sigma_w^2\right]}{\left[\exp(H.\sigma_w^2)-1\right]^{1/2}}$$

Avec :

$N_{X\%}$ le quantile de la loi normale centrée et réduite (par exemple à 5%, $N_{5\%} \approx -1.64$).

$Q_{X\%}$ le quantile de la loi normale ajusté de l'horizon d'investissement, il est positif car une loi log normale a des valeurs exclusivement positives.

On définit le paramètre d'intolérance au risque implicite comme :

$$E(1+P^1) - \overline{q}.\sigma(1+P^1) = \left(1+S^H\right)^{1/H}$$

$$\Leftrightarrow\ E(1+P^1) - \overline{q}.\sigma(1+P^1) = \left(1+S^H\right)^{1/H}$$

$$\Leftrightarrow\ \boxed{\overline{q} = \frac{E(P^1) - S^1}{\sigma(P^1)}} \qquad [1]$$

Avec :

$E(P^1)$ et $\sigma(P^1)$ : respectivement l'espérance de rendement et la volatilité du portefeuille.

$S^1$ : l'équivalent sur une période annuelle du seuil de souffrance toléré à l'horizon $S^H$.

---

7 Si $S^H = 0\%$, alors on cherche l'allocation qui ne génère un rendement nul dans au moins 5% des cas. Si $S^H = -5\%$, on cherche l'allocation qui donne une perte de -5% dans au moins 5% des cas. Enfin, si $S^H = 5\%$, alors on cherche l'allocation qui procure 5% de rendement minimum dans au moins 5% des cas.

8 **ALBRECHT, T.** - "The Mean -Variance Framework and Long Horizons", Financial Analysts Journal, vol. 54, n° 4, July/August 1998, pp. 44-49.

C'est donc en définissant un seuil de perte statistique maximum à un horizon donné que le paramètre d'intolérance au risque implicite de l'investisseur va être déduit et non l'inverse. Ceci comporte l'avantage de pouvoir accéder à un coefficient d'intolérance au risque qui ait une signification concrète, puisque rien n'est plus parlant, pour un investisseur que le niveau de perte possible sur un portefeuille dans un certain laps de temps.

Naturellement ce raisonnement ne s'affranchit pas d'une logique conforme au CAPM, dans laquelle le rendement espéré et la volatilité des actifs sont liés positivement. Mais s'il en est différemment ou si l'on veut introduire une volatilité tenant compte d'une symétrie de la distribution par exemple (avec une correction de Cornish-Fisher[9]), cela est également possible.

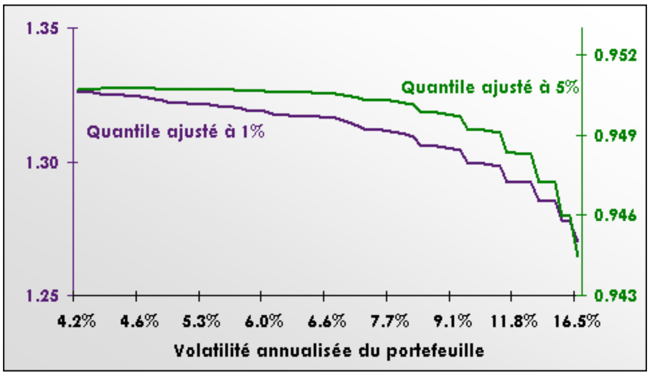
Par exemple, retenons une allocation à base de trois classes d'actifs, des actions, des obligations et une classe d'actif dite alternative. Statuons sur les couples rendement –risque suivants :

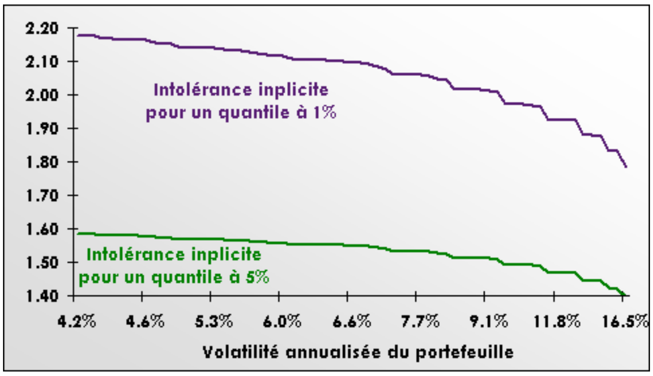
| | Rendement annualisé | Volatilité annuelle |
|---|---|---|
| Actions | 8.0% | 15.0% |
| Obligations | 5.0% | 4.0% |
| Alternatif | 6.0% | 6.0% |

Avec la matrice de corrélations suivante :

| | Actions | Obligations | Alternatif |
|---|---|---|---|
| Actions | 1.0 | | |
| Obligations | 0.3 | 1.0 | |
| Alternatif | 0.2 | 0.5 | 1.0 |

Nous observons ci-contre, le quantile ajusté et l'intolérance implicite pour deux niveaux de quantile de la loi normale (1% et 5%) en faisant varier le seuil de souffrance d'individu, pour un horizon d'investissement de 3 ans. La variation du seuil se souffrance étant en lien direct avec la volatilité, nous pouvons donc exprimer le quantile ajusté et l'intolérance implicite qui en découle pour différents niveaux de volatilité. Ces niveaux de volatilité proviennent des allocations d'actifs qu'un investisseur est susceptible de composer.



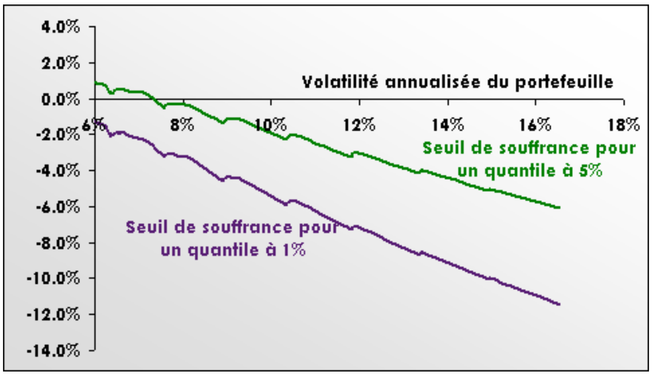




[9] **LEE, Y. S. & LIN, T. K.** - "Higher-Order Cornish Fisher Expansion", Applied Statistics, 1992, vol. 41, pp. 233-240.

Nous comprenons donc que nous avons défini un coefficient d'intolérance pour le risque qui va dépendre de l'espérance et de la volatilité des classes d'actifs, mais aussi du seuil de souffrance d'un investisseur, puisque :

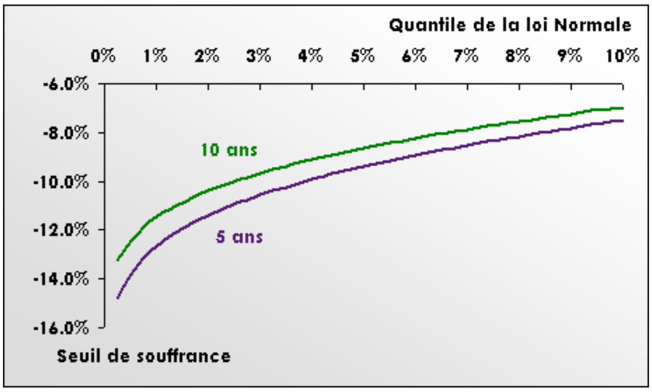
$$\boxed{S^1 = E(P^1) - \overline{q}.\sigma(P^1)} \qquad [2]$$

Dès lors, nous pouvons exprimer le seuil de souffrance en fonction des divers niveaux de volatilité, en restant sur un horizon d'investissement de 3 ans. Cela permettra à un investisseur de se positionner sur une allocation d'actifs, ou une famille d'allocation d'actifs, compatible avec son niveau de risque assumé.




Nous observons une sensibilité du seuil de souffrance au quantile retenu. Plus on souhaite cerner le maximum de perte possible avec une forte probabilité, plus ce minimum sera faible car on englobera une part plus importante de la distribution possible (tout en se réservant, une fois encore la possibilité d'explorer des moments d'ordres supérieurs[10]).

Nous exprimons par exemple ci-dessous, des seuil de souffrance théorique pour un portefeuille de rendement 5% et de volatilité 7% sur deux horizons d'investissement, 5 et 10 ans. Nous voyons que[11], moins nous englobons une partie importante de la distribution possible (vers la droite du graphique), plus le seuil de souffrance possible se réduit, mais il est déformé en faveur d'un moins grand réalisme.




[10] **KRITZMAN, M.** - "About Higher Moments", Financial Analysts Journal, vol. 50, n°5, 1994, pp. 10-17.

[11] Voir annexe pour la sensibilité du seuil de souffrance au quantile de la loi normale

### III/ Décomposition du risque lié la sur/sous exposition de l'allocation au benchmark

Une fois le mix de classes d'actifs défini en fonction de la perte à horizon endossable par un investisseur, un risque de gestion peut-être entrepris. Celui-ci peut être :

- un risque actif d'allocation tactique (par déviation opportuniste entre les classes d'actifs en effectuant du market timing),
- ou un risque actif de sélection (en retenant sur chacune des classes d'actifs, des stratégies d'investissement plus ou moins actives qui vont venir s'additionner au risque actif du portefeuille).

Pour modéliser le risque actif contenu dans un portefeuille *P*, nous posons l'équation de régression linéaire suivante:

$$\boxed{P = \alpha + \beta.B + e} \qquad [3]$$

avec :
*B* : le benchmark issu de l'exercice précédent d'allocation stratégique
$cov(B,e)=0$
$\sigma^2(e) = TE^2(e)$
α : l'apport de la gestion active vu comme un ratio d'information.

On a : $P - B = \alpha + (\beta - 1).B + e$

En posant $\beta = 1 + \gamma$, on obtient :

$$\boxed{\tilde{P} = \alpha + \gamma.B + e} \qquad [4]$$

Le terme $\gamma$ est le βeta de l'écart de performance (*P-B*) au benchmark. Une valeur positive indique une surexposition (directionnel positif sur le benchmark), tandis qu'une valeur négative indique une sous-exposition (directionnel négatif sur le benchmark).

La performance relative s'écrit :

$$\boxed{E(\tilde{P}) = \alpha + \gamma.E(B)} \qquad [5]$$

Clairement, si la performance du benchmark est positive alors une surexposition implique une surperformance positive.

Évidemment, il n'y a pas de possibilité de free lunch. Si aucun risque actif (tracking error, *TE*) n'est pris, aucun supplément de performance (alpha, $\alpha$) ne peut être enregistré. En effet, si $TE^2(e) = 0 \Rightarrow \alpha = 0$.

C'est pourquoi on pose[12] :

$$\boxed{\alpha = \bar{k}.TE(e)} \qquad [6]$$

[12] Pour les exemples chiffrés nous retiendrons un niveau de 0.5 qui peut correspondre à un objectif de ratio d'information pour une gestion active.

Nous exprimons ainsi le risque actif sous forme de tracking error (*TE*) et on obtient :

$$\boxed{TE^2(P) = \gamma^2.\sigma^2(B) + TE^2(e)} \qquad [7]$$

En conséquence, la volatilité globale devient :

$$\sigma^2(P) = \beta^2\sigma^2(B) + TE^2(e)$$

$$\Leftrightarrow \quad \sigma^2(P) = \sigma^2(B) + 2\gamma\sigma^2(B) + \gamma^2\sigma^2(B) + TE^2(e)$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\sigma^2(P) = \sigma^2(B) + 2\gamma\sigma^2(B) + TE^2(P)} \qquad [8]$$

Alors, le coefficient de sur/sous exposition, à savoir le βeta du portefeuille au benchmark s'écrit :

$$\beta_P = \frac{\mathrm{cov}(P,B)}{\sigma^2(B)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta_P = \frac{\mathrm{cov}(\sum_{i=1}^{N} w_i r_i, B)}{\sigma^2(B)} = \sum_{i=1}^{N} w_i \frac{\mathrm{cov}(r_i, B)}{\sigma^2(B)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta_P = \sum_{i=1}^{N} \overline{w}_i \frac{\mathrm{cov}(r_i, B)}{\sigma^2(B)} + \sum_{i=1}^{N} \Delta w_i \frac{\mathrm{cov}(r_i, B)}{\sigma^2(B)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta_P = \frac{\mathrm{cov}(\sum_{i=1}^{N} \overline{w}_i r_i, B)}{\sigma^2(B)} + \sum_{i=1}^{N} \Delta w_i \frac{\mathrm{cov}(r_i, B)}{\sigma^2(B)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta_P = 1 + \sum_{i=1}^{N} \Delta w_i \frac{\mathrm{cov}(r_i, B)}{\sigma^2(B)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{\gamma = \sum_{i=1}^{N} \Delta w_i \beta_i} \qquad [9]$$

D'une certaine façon, Gamma[13] $(\gamma)$ mesure l'agressivité de la politique d'investissement du point de vue tactique.

[13] Voir Annexe 2 pour une autre expression de Gamma

## IV/ Détermination du risque relatif global

Nous prenons donc maintenant une fonction d'utilité quadratique[14], au sein de laquelle nous pouvons inclure le risque actif de gestion en plus du risque stratégique.

$$U = E(P) - \frac{\lambda}{2}.\sigma^2(P) = E(B) + E(\tilde{P}) - \frac{\lambda}{2}.\left[(1+\gamma)^2.\sigma^2(B) + TE^2(e)\right]$$

$$U = \underbrace{E(B) - \frac{\lambda}{2}.(1+2.\gamma).\sigma^2(B)}_{\text{risque stratégique}} + \underbrace{E(\tilde{P}) - \frac{\lambda}{2}.TE^2(P)}_{\text{risque actif}}$$

De [1], nous posons $E(B) = \bar{q}.\sigma(B)$ et nous avons : $E(\tilde{P}) = \gamma.\bar{q}.\sigma(B) + \bar{k}.TE(e)$

Nous obtenons : $U = \bar{q}.(1+\gamma).\sigma(B) - \frac{\lambda}{2}.(1+\gamma)^2.\sigma^2(B) + \bar{k}.TE(e) - \frac{\lambda}{2}.TE^2(e)$

En cherchant à maximiser l'utilité de l'investisseur dans ce cadre, les conditions d'optimalité du premier ordre deviennent :

- D'une part :

$$\frac{\partial U}{\partial \sigma(B)} = 0 \Leftrightarrow \bar{q}.(1+\gamma) - \lambda.(1+\gamma)^2.\sigma(B) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{\bar{q}.(1+\gamma)}{(1+\gamma)^2.\sigma(B)} = \frac{\bar{q}}{(1+\gamma).\sigma(B)}} \qquad [10]$$

- D'autre part :

$$\frac{\partial U}{\partial TE(e)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \bar{k} - \lambda.TE(e) = 0$$

$$\Leftrightarrow TE^*(e) = \frac{\bar{k}}{\lambda}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{TE^*(e) = \frac{\bar{k}}{\bar{q}}.(1+\gamma).\sigma(B)} \qquad [11]$$

En substituant [11] dans [5], on obtient :

$$TE^2(P) = \gamma^2.\sigma^2(B) + \left(\frac{\bar{k}}{\bar{q}}.(1+\gamma).\sigma(B)\right)^2$$

$$\Leftrightarrow TE^2(P) = \left[\gamma^2 + \frac{\bar{k}^2}{\bar{q}^2}.(1+\gamma)^2\right].\sigma^2(B)$$

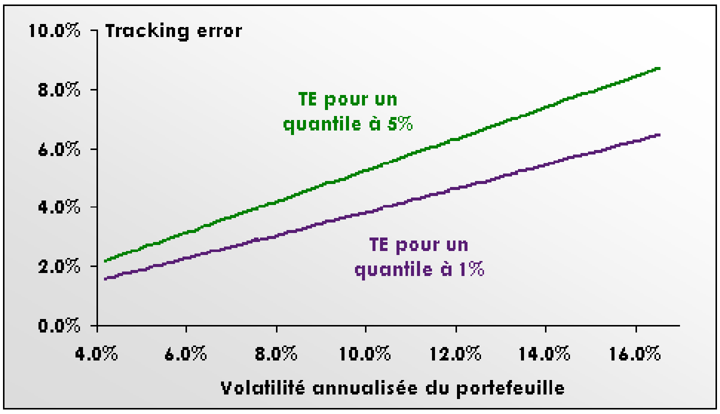
Ainsi la tracking error d'allocation tactique se définit avec :

$$\boxed{TE(P) = \sqrt{\gamma^2 + \frac{\bar{k}^2}{\bar{q}^2}.(1+\gamma)^2}\;.\sigma(B)} \qquad [12]$$

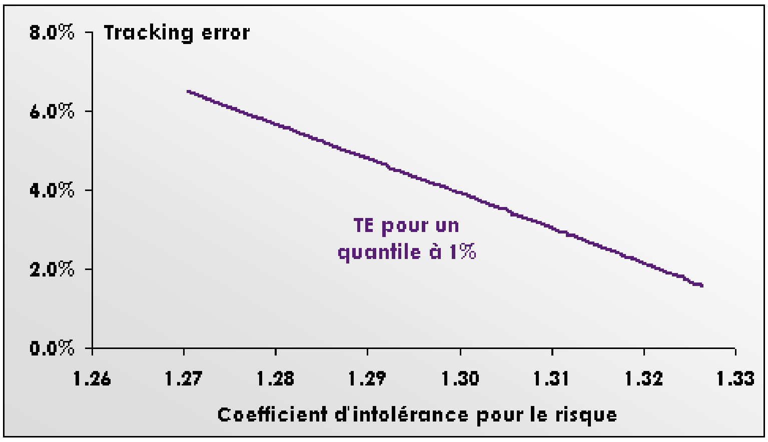
[14] **COLLINS, RA.& GBUR, E.E.** - "Quadratic Utility and Linear Mean-Variance: A Pedagogic Note", Review of Agricultural Economics, Vol. 13, No. 2 July, 1991, pp. 289-291.

On se rend donc compte que :

- Plus la volatilité du benchmark est élevée plus la tracking error est élevée

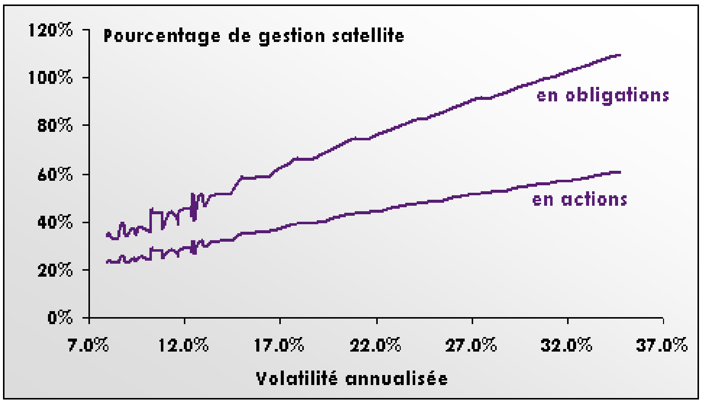



- Plus l'intolérance au risque est élevée, plus la tracking error est faible



- Plus le ratio d'information de la gestion active satellite est élevée plus la TE est élevée

Effectivement, si l'on opte pour une combinaison[15] de gestion de réplication à faible tracking error d'une part (Core) et d'un gestion à plus forte valeur ajoutée (Satellite) d'autre part, pour chacune des classes d'actifs, alors le pourcentage à investir en Satellite est lui-même fonction d'un paramètre d'aversion $\lambda$ .




Il se calcule en supposant une corrélation nulle entre le core et le satellite:

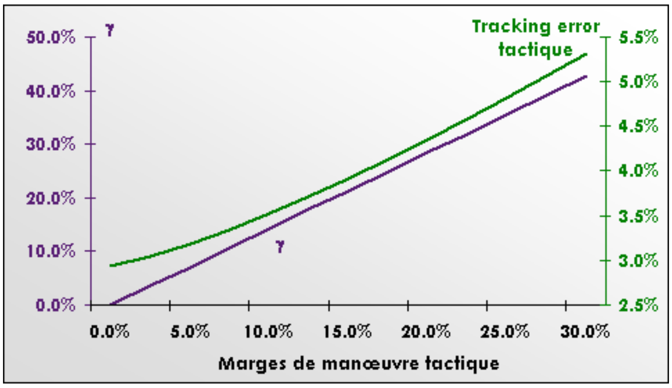
$$\boxed{Poids\ Satellite = \frac{IR_S.TE_S - IR_C.TE_C + \lambda.TE_C^2}{\lambda.TE_S^2 + \lambda.TE_C^2}} \qquad [14]$$

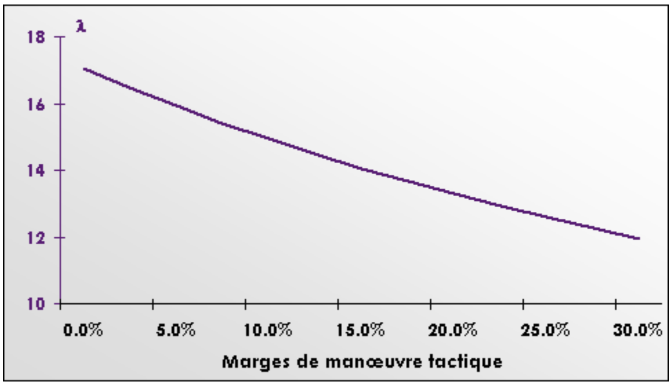
Nous avons retenu les paramètres de tracking error suivants pour chacune des gestions :

| | Actions | Obligations | Alternatif |
|---|---|---|---|
| **Core** | 3.0% | 1.5% | 4.0% |
| **Satellite** | 8.0% | 4.0% | 12.0% |

15 **AMENC, N. ; MALAISE, Ph. & MARTELLINI, L.** – "Revisiting Core-Satelitte Investing", The Journal of Portfolio Management, Fall 2004, pp.64-75

- En général plus les déviations stratégiques sont élevées sur les actifs à fort βeta plus la tracking error est élevée[16]. On se rend compte de ce phénomène, en faisant varier les marges tactiques (des actif risqués actions et alternatifs contre obligations, la sommes des déviations étant toujours nulle) pour une allocation stratégique unique 40% actions, 30% obligations, 30% alternatif ci-dessous.




## Conclusion

Nous avons vu qu'il existe une possibilité d'harmoniser les trois piliers du risque global d'un portefeuille : la volatilité stratégique, la tracking error de gestion tactique et la tracking error de sélection sur chacune des classes d'actifs entrant dans le mix stratégique.

Une fonction d'utilité simple de type quadratique peut être utilisée en partant de la performance minimale qu'un investisseur est prêt à endurer sous un espace de temps donné. Le paramètre d'aversion au risque implicite qui s'en déduit permet :

- de fixer l'allocation stratégique de l'investisseur,
- de positionner le risque actif dû à l'allocation tactique
- de définir le risque actif provenant de la sélection
- et par conséquent de connaître la répartition de ce risque de sélection entre des stratégies de gestions plus ou moins actives.

[16] La TE n'est pas une fonction strictement croissante de la déviation stratégique. Le minimum de $TE(P)$ est atteint pour $\gamma = -\frac{1}{\frac{\bar{q}^2}{\bar{k}^2}+1}$ .

## Références

**ACERBI, C. & TASCHE, D. –** "On the Coherence of Expected Shortfall", Journal of Banking and Finance, 2002, vol.26, pp. 1487–1503.

**ALBRECHT, P. ; MAURER, R. & RUCKPAUL, U. -** "Shortfall Risks of Stocks in the Long Run", Financial Markets and Portfolio Management, Volume 15, 2001, Number 4, pp. 481-499.

**AMMANN, M. & REICH, C. -** "Value-at-Risk for Non-Linear Financial Instruments – Linear Approximation or Full Monte-Carlo?", WWZ/Department of Finance, Working Paper 8, Dec.2001.

**BODIE, Z. -** "On the Risk of Stocks in the Long Run", Financial Analysts Journal, May-June 1995, p.1-7.

**BOOTH, L. -** "Formulating Retirement Targets and the Impact of Time Horizon on Asset Allocation", Financial Services Review, 13, 2004, pp. 1-17.

**CAMERER, C. & WEBER, M -** "Recent Developments in Modelling Preferences: Uncertainty and Ambiguity", Journal of Risk and Uncertainty, 1992vol.5, pp.325-70.

**CAMPBELL, R. ; HUISMAN, R. & KOEDIJK, K. -** "Optimal Portfolio Selection in a Value-at-Risk Framework", Journal of Banking & Finance, 25, 2001, pp.1789-1804.

**CHAMBERLAIN, G. -.** A characterization of the Distributions that Imply Mean-Variance utility Functions. Journal of Economic Theory, 1983, vol.29, pp. 185-201.

**DOW, P.J. –** "Age, Investing Horizon and Asset Allocation", Journal of Economics and Finance, Vol. 33, n° 4, pp. 422-436, May 2008

**DOWD, K. ; BLAKE, D. & CAIRNS, A. -** "Long-Term Value at Risk", CRIS Discussion Paper Series, September 2003, pp. 1-15.

**DUVAL, J. -** "The Myth of Time Diversification : Analysis, Application, and Incorrect New Account Forms", PIABA Bar Journal, Spring 2006, pp. 15-23.

**FABOZZI, F. & al. 6** Financial Modeling of the equity Market: from CAPM to cointegration .Wiley Finance, 2006, p. 45.

**FISHER, K.I. & STATMAN, M. -** "A Behavioural Framework for Time Diversification", The Financial Analysts Journal, May/June 1999, pp. 88-97.

**FRIEDMAN, M. & SAVAGE, L -** "The utility analysis of choices involving risks", Journal of Political Economy, 1948, vol. 56, pp .279–304.

**GOLLIER, C. -** "Optimal Portfolio Management for Individual Pension Plans", CESIFO, Working Paper n° 1394, Category 3, Social Protection, February 2005, pp. 1-26.

**KRAUS, A. & LITZENBEGER, R. -** "Skewness Preference and the Valuation of Risk Assets", Journal of Finance, vol. 31, n°4, September 1976, pp. 1085-1100.

**LIN, M.-C. & CHOU, P.-H. -** "The Pitfall of Using Sharpe Ratio", Global EcoFinance, 2003, n°1, pp. 84-89.

**LOBOSCO, A. & DIBARTOLOMEO, D. -** "Approximating the Confidence Intervals for Sharpe Style Weights", The Financial Analysts Journal, vol. 53, n° 4, July/August 1997, pp. 80-85.

**LUCAS, A. & KLAASSEN, P. -** "Extreme Returns, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation", Journal of Portfolio Management, n°25, Fall 1998, pp.71-79.

**SORTINO, F. & FORSEY, H. -** "On the Use and Misuse of Downside Risk", Journal of Portfolio Management, vol. 22, n°2, 1996, pp. 35-42.

**TVERSKY, A. & KAHNEMANN, D. -** "Loss Aversion in Riskless Choice: a Reference Dependent Model" Quarterly Journal of Economics, 1991vol.106, pp. 1039–1061.

## Annexe 1 : Dérivée du quantile ajusté par rapport au quantile de la loi normale

$$\frac{d}{dN}\left(\frac{1-e^{\sqrt{H}.\sigma.N-0.5.H.\sigma^2}}{\sqrt{e^{H.\sigma^2}-1}}\right)=\frac{\frac{d}{dN}\left(1-e^{\sqrt{H}.\sigma.N-0.5.H.\sigma^2}\right)}{\sqrt{e^{H.\sigma^2}-1}}$$

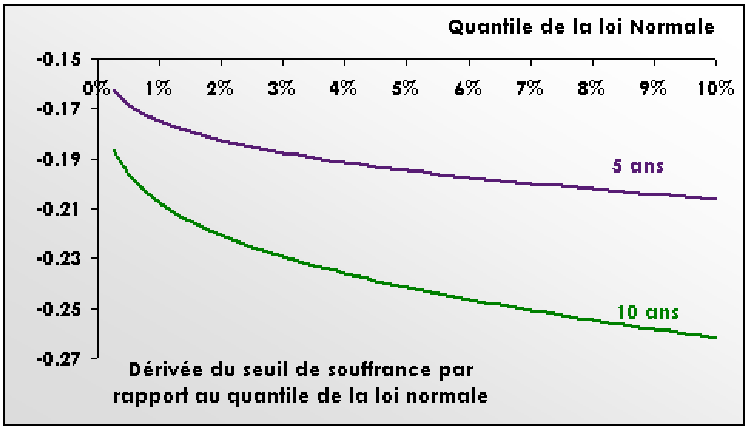
$$=\frac{\frac{d}{dN}\left(e^{\sqrt{H}.\sigma.N-0.5.H.\sigma^2}\right)}{\sqrt{e^{H.\sigma^2}-1}}$$

$$=-\frac{e^{-0.5.H.\sigma^2+\sqrt{H}.\sigma.N}.\frac{d}{dN}\left(e^{-0.5.H.\sigma^2+\sqrt{H}.\sigma.N}\right)}{\sqrt{e^{H.\sigma^2}-1}}$$

$$=-\frac{\frac{d}{dN}\left(-0.5.H.\sigma^2\right)+\sqrt{H}.\sigma.\frac{d}{dN}(N).e^{\sqrt{H}.\sigma.N-0.5.H.\sigma^2}}{\sqrt{e^{H.\sigma^2}-1}}$$

$$=-\frac{\sqrt{H}.\sigma.e^{\sqrt{H}.\sigma.N-0.5.H.\sigma^2}.\frac{d}{dN}(N)}{\sqrt{e^{H.\sigma^2}-1}}$$

$$\boxed{\frac{d}{dN}(S)=-\frac{\sqrt{H}.\sigma.e^{\sqrt{H}.\sigma.N-0.5.H.\sigma^2}}{\sqrt{e^{H.\sigma^2}-1}}} \qquad (13)$$



## **Annexe 2 : Expression du paramètre Gamma**

Il est relativement aisé de réintégrer la contrainte $\sum_{i=1}^{N} \Delta w_i = 0$ de la façon qui suit.

Posons que le Nième actif du portefeuille est celui qui a le plus petit βeta par rapport au benchmark et le premier celui qui a le plus important, soit $\beta_{\max} = \beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_N = \beta_{\min}$ .

Donc, [9] devient :

$$\gamma = \sum_{i=1}^{N-1} \Delta w_i \left(\beta_i - \beta_N\right) \text{avec } \left(\beta_i - \beta_N\right) \geq 0$$

Evidement la surexposition ($\Delta w_i > 0$) des actifs à fort βeta augmente $\gamma$ et donc la surexposition du portefeuille au benchmark et la tracking error.

Il est aussi important de noter que le βeta de l'écart de performance (*P*-*B*) peut être exprimé à la fois comme la combinaison linéaire des βetas des actifs du portefeuille ou des βetas des écarts de performance des actifs envers le benchmark.

$$\tilde{\gamma} = \sum_{i=1}^{N} \Delta w_i \tilde{\beta}_i = \sum_{i=1}^{N} \Delta w_i \frac{\operatorname{cov}(r_i - B, B)}{\sigma^2(B)}$$

$$\Leftrightarrow \qquad \tilde{\gamma} = \sum_{i=1}^{N} \Delta w_i \left[ \frac{\operatorname{cov}(r_i, B)}{\sigma^2(B)} - \frac{\operatorname{cov}(B, B)}{\sigma^2(B)} \right]$$

$$\Leftrightarrow \qquad \tilde{\gamma} = \gamma - 1\left( \sum_{i=1}^{N} \Delta w_i \right) = \gamma$$