

Modèle d'évaluation d'un CDS impliquant un risque de contrepartie – Approche par les copules

Etienne GEBRAN HARB¹

Septembre 2011

Abstract

Dans le présent article, nous proposons un modèle général de pricing des dérivés de crédit inspiré des travaux de Cherubini et Luciano (2003) et de Luciano (2003). Nous évaluons un *Credit Default Swap* « vulnérable », comprenant un risque de contrepartie. Nous y intégrons la *Credit Valuation Adjustment* (CVA) préconisée par Bâle III pour optimiser l'allocation du capital économique. Nous reprenons la représentation générale de pricing établie par Sorensen et Bollier (1994) et contrairement aux travaux cités ci-dessus, le paiement de protection ne survient pas forcément à l'échéance du contrat. La dépendance entre le risque de contrepartie et celui de l'entité de référence est approchée par les copules. Nous examinons la vulnérabilité du CDS pour des cas de dépendance extrêmes grâce à un choix de copule mixte combinant des copules usuelles « extrêmes ». En variant le rho de Spearman, la copule mixte balaie un large spectre de dépendances, tout en assurant des *closed form prices*. Le modèle qui en résulte est adapté aux pratiques du marché et facile à calibrer. Nous en fournissons une application numérique.

Cet article présente un modèle de pricing d'un dérivé de crédit single-name ou vanille, notamment un *Credit Default Swap* (CDS), comprenant un risque de contrepartie appelé donc CDS vulnérable. Plus explicitement, nous nous penchons sur la prise en considération, dans l'évaluation du spread du CDS, de la Credit Valuation Adjustment (CVA) qui prend une ampleur considérable depuis quelques années, notamment, depuis les nouvelles mesures de réforme Bâle III recommandées par le Comité de Bâle sur le Contrôle Bancaire (Basel Committee on Banking Supervision (BCBS)). Il s'agit précisément de l'ajustement d'évaluation du crédit qui doit refléter la valeur de marché du risque de crédit (matérialisant, à titre d'exemple, un changement de notation de la contrepartie)². En effet, un prix théorique qui ne tient pas compte de la vulnérabilité de la contrepartie tend à surestimer ou à sous-estimer les

¹ Docteur en Sciences Economiques – Finance de Marché, Professeur Assistant de Finance, ESSCA Ecole de Management, LUNAM Université. E-mail : etienne.harb@essca.fr.

Nous voudrions remercier Monsieur le Professeur Umberto CHERUBINI de l'Université de Bologna, Turin pour avoir pris le temps de répondre à toutes nos questions en dépit de son emploi de temps très chargé. Ses remarques et réactions sur ce travail ont contribué considérablement à son amélioration et ont motivé des pistes de recherche futures. Toutes les opinions émises dans cet article nous sont propres.

² Nous y reviendrons en détail plus tard

primes payées réellement dans le cadre des contrats CDS, et par conséquent, à se tromper dans le calcul du capital réglementaire nécessaire pour ne pas compromettre la solvabilité d'une institution financière.

À la lumière de cette nouvelle approche de mesure du risque de contrepartie, nous tentons d'affiner un modèle de pricing du CDS proposé par Luciano (2003) capturant la dépendance entre les sources de risque de défaut par les copules, un outil technique connu pour son grand attribut en matière de mesure de la dépendance entre deux variables. Il s'agit d'un outil permettant une meilleure spécification de la structure de dépendance, exprimant toute fonction de distribution jointe en termes de ses fonctions de distribution marginales (Sklar(1959)). Dans l'évaluation des dérivés de crédit, la copule permet alors de déterminer la probabilité de défaut jointe en procédant par étapes : modéliser les probabilités de défaut marginales puis spécifier leur dépendance. Cet avantage fut exploité la première fois par Li (2000) employant une copule spécifique : la copule Gaussienne. Dans notre modèle, nous optons pour une copule mixte combinant linéairement les « copules usuelles extrêmes », plus explicitement la copule produit, la copule minimum et la copule maximum. En effet, il existe un grand nombre de copules mixtes, celle que nous adoptons a l'avantage de générer des formules d'évaluation du CDS encadrées pour des cas de dépendance extrême (*closed form prices*), elle dépend d'un seul paramètre directement lié aux mesures de dépendance non paramétriques tels le tau de Kendall et le rho de Spearman.

Le modèle que nous développons, inspiré également des travaux de Cherubini et Luciano (2003b), pourrait être adapté aussi à l'évaluation de produits structurés comme le *First-to-Default Swap* ou un CDS sur un panier de signatures.

Le modèle initial a réussi à fournir des *closed form pricing bounds* pour les dérivés de crédit type CDS ou FTD vulnérables et à apprécier le comportement de leurs primes vis-à-vis d'un changement de la qualité de crédit de la contrepartie. Nous reformulons ce problème d'évaluation du spread en faisant appel à la formule générale de la CVA et en relâchant une hypothèse prise par Luciano (2003) concernant l'occurrence de défaut. Alors que le modèle initial considère, pour simplifier, que le paiement de la protection en cas de défaut n'est possible qu'à l'échéance du contrat, nous proposons un cas plus général où le défaut peut survenir à n'importe quel moment avant l'échéance et le paiement de la protection a lieu à la fin de chaque période de paiement de spread. Nous essayons ainsi d'adapter le modèle initial d'évaluation du spread à ce qui est pratiqué, de nos jours, sur les marchés financiers.

Par conséquent, nous obtenons un modèle qui peut être facilement calibrable sur le marché. De plus, en y intégrant un taux de recouvrement stochastique comme nous envisageons de

faire dans l'avenir, il serait entièrement adapté au cadre des réformes préconisées par Bâle III. Nous tenons également à préciser que dans ce modèle, facile à implanter, l'arrivée du défaut peut être approchée par le modèle structurel d'évaluation du risque de crédit comme par le modèle sous forme réduite.

Cet article sera structuré comme suit : dans une première section, nous ferons un survol de l'état de l'art traitant des études faites dans le domaine du pricing des dérivés de crédit adoptant des approches par les copules ainsi que des travaux intégrant la CVA dans ce genre de pricing. Une deuxième section sera consacrée à la présentation du modèle d'évaluation de la prime du CDS pour des cas de dépendance extrême et sous la copule mixte. Nous y étudierons le risque de contrepartie comme étant la différence entre la prime payée dans le cadre d'un CDS sans risque de contrepartie et celle d'un CDS vulnérable. Plus explicitement, nous analyserons la sensibilité de ces primes à l'égard de la dépendance entre les événements de crédit de l'émetteur de l'actif sous-jacent et du vendeur de protection assujetti également au risque de défaut. Dans une dernière section, nous présenterons une application numérique sur des données du marché financier collectées sur Moody's et Bloomberg. Nous nous livrerons plus tard à une autocritique et suggérerons des mesures d'amélioration du modèle afin de lui donner une portée encore plus générale, notamment avec l'intégration d'un taux de recouvrement stochastique.

1. Revue de la littérature

Les travaux pionniers de Li (2000) étaient un vrai exploit en matière de la spécification de la dépendance des risques de défaut dans l'évaluation des dérivés de crédit par les copules et en particulier par la copule Gaussienne comme nous l'avons déjà évoqué. Son étude considère le modèle structurel de risque de crédit. Plus tard, son idée a été développée par Schönbucher et Schubert (2001) dans le contexte du modèle sous forme réduite, modélisant la dépendance entre les seuils de déclenchement des événements de défauts par les copules archimédiennes.

Jouanin et al. (2001) ont développé la contribution faite par Schönbucher et Schubert (2001) et ont construit leur propre approche, toujours adoptant la copule pour mesurer la dépendance entre les défauts dans le cadre du modèle à intensité. D'autres applications des copules en finance sont dédiées à Cherubini et Luciano (2002a, 2002b, 2003a, 2003b) où ils adoptent des copules mixtes pour capturer la dépendance entre les événements de défaut de l'actif sous-jacent et le risque de contrepartie dans le pricing des options bivariées, des CDS *single-name* et des *First-To-Default Swaps*. Ils obtiennent donc des formules encadrées pour les

prix des produits concernés et pour les stratégies de couverture puis ils comparent ces résultats avec ceux obtenus avec la copule Clayton. D'autres ouvrages et articles ont également étudié l'usage des copules en finance tels Embrechts et al. (2003), Giesecke (2004), Cherubini et al (2004) et un grand nombre d'études s'ensuivront jusqu'à nos jours (dont les plus récents Cherubini et Romagnoli (2009), Luciano et Semeraro (2010), Cherubini et al. (2011), etc.).

Alors qu'en 2002 et 2003, les travaux de Cherubini et Luciano cités ci-dessus, ont tenu compte de la possibilité de défaut de la contrepartie, ceci n'était pas connu sous le nom de la CVA dont l'usage est plus fréquent aujourd'hui. En fait, un ajustement de crédit (CVA) mesure la différence entre la valeur actualisée d'un dérivé sans risque de défaut de la contrepartie et la valeur corrigée du risque de défaut de cette dernière. La formule générale est de type :

$$CVA = \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+r)^t} - \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+r+\Pi)^t}$$

où T désigne l'échéance du contrat, CF_t les cash-flows attendus du contrat à la date t , r le taux d'intérêt sans risque, Π la prime de risque ou spread supporté sur le marché par la contrepartie³.

Plus le risque de contrepartie est élevé (correspondant à une augmentation des spreads de la contrepartie), plus la CVA va gonfler, venant diminuer le montant en valeur de marché du produit dérivé.

Plus généralement, un ajustement de crédit ou CVA est un ajustement de valorisation du portefeuille de transaction pour tenir compte du risque de contrepartie du fait de la valeur potentielle positive du contrat, de la probabilité de défaut de la contrepartie et de l'estimation du taux de recouvrement. En effet, la prise en considération de la CVA, comme nous l'avons déjà signalé, est l'une des préoccupations majeures de Bâle III et c'est sa principale innovation concernant le calcul des risques pondérés. Il s'agit de bien évaluer la charge en capitaux propres qui sera imposée aux établissements au titre des ajustements de crédit (CVA) sur produits dérivés de gré à gré. Ainsi, les pertes en valeur de marché qui découlent d'une hausse de la probabilité de défaut de la contrepartie étaient ignorées par Bâle II. Comme elles étaient massives durant la crise, elles seront désormais appréhendées dans le cadre de Bâle III.

³ Définition de la CVA donnée par la banque BNP Paribas dans *in* Bâle III n'aura peut-être pas les vertus de la lance d'Achille, Quignon L., *Conjoncture*, Mai-Juin 2011

Nous présenterons succinctement les différents travaux qui se sont penchés sur l'étude de risque de contrepartie dans l'évaluation des dérivés de crédit sans trop nous attarder sur l'aspect technique de chacun.

Nous citons Canabarro et Duffie (2003), ils proposent une méthode pratique du calcul de la CVA dans le cadre des dérivés de crédit négociés sur le marché de gré-à-gré (*Over The Counter* (OTC)) en considérant particulièrement des swaps de taux d'intérêt entre deux contreparties pouvant faire défaut.

De Prisco et Rosen (2005) considèrent également plusieurs méthodes, entre autres, la simulation Monte Carlo et des approches qu'on retrouve dans Bâle I pour calculer des statistiques servant à mesurer le risque de contrepartie.

Gibson (2005) propose une méthode analytique (basée sur un modèle gaussien d'évaluation mark-to-market) et une simulation Monte Carlo (basée sur une marche aléatoire gaussienne) pour évaluer l'exposition espérée (*expected exposure*) et l'exposition positive espérée (*expected positive exposure*) aux risques de marge et de garanties d'une contrepartie.

Redon (2006) aborde plusieurs méthodes pour calculer également l'*expected exposure* de façon à tenir compte du risque de corrélation défavorable (*Wrong Way Risk* (WWR) nommé ainsi par le Comité de Bâle) qui correspond au risque que l'exposition à une contrepartie soit inversement corrélée à la qualité de crédit de celle-ci.

Zhu et Pykhtin (2007) s'intéressent aussi à la mesure de l'*expected exposure* ainsi qu'à celle de la CVA dans le cas du *Wrong Way Risk*.

Brigo et Capponi (2008) considèrent un risque de contrepartie bilatéral et proposent une formule générale de calcul de la CVA en l'absence de défauts joints. Ils utilisent une copule gaussienne trivariée pour représenter le risque de l'investisseur acheteur de la protection dans le cadre d'un CDS, celui du vendeur de protection ou la contrepartie et celui de l'émetteur de l'actif sous-jacent. Ils estiment que les modèles de pure contagion peuvent être inappropriés pour modéliser la CVA comme ils sous-estiment le risque dans un environnement de corrélation élevée.

De même que Brigo et Capponi (2008), Gregory (2009) tente lui aussi de mesurer la CVA dans le cadre d'un portefeuille à risque de crédit bilatéral constitué de produits dérivés négociés sur le marché OTC. Pour ce, il fait appel à un modèle de copule gaussienne permettant des défauts simultanés (représentant ainsi un risque systématique). Il trouve que l'apport de la prise en compte des défauts simultanés n'est pas significatif sur l'évaluation de la CVA.

Lipton et Sepp (2009) développent une méthode originale pour évaluer la CVA dans le cadre d'un contrat CDS où le risque de crédit est mesuré par un modèle structurel basé sur un processus de diffusion avec sauts.

Pykhtin (2011) propose un cadre général pour le calcul du capital réglementaire pour le risque de crédit de contrepartie intégrant systématiquement la CVA. Les banques doivent désormais soustraire la CVA de la valeur de l'exposition en cas de défaut (*Exposure at Default* (EAD)) de la contrepartie. Il se sert de son modèle pour analyser le traitement du risque de contrepartie sous Bâle II et Bâle III.

Des études plus récentes continuent à considérer la mesure de la CVA et ses effets sur les résultats des institutions financières et de la charge en capitaux qu'elle leur sera imposée. Un article récent paru sur Risk Magazine⁴ traite également de l'impact de la mesure de la CVA sur la charge en capital qui sera imposée par les institutions de crédit à leurs clients souverains pour la première fois. Comme ces institutions vont être contraintes à se conformer aux nouvelles réformes de mesures du risque de contrepartie à partir de 2013, en cas de réticence des gouvernements à fournir des garanties, les coûts en capital pourraient devenir considérables.

2. Le modèle

2.1. Présentation

Nous considérons un dérivé de crédit simple, le CDS. Dans le cadre de notre modèle, nous nous contentons d'une définition rapide de ce produit nous permettant d'élaborer la formule de son évaluation.

Le CDS est un contrat par lequel un vendeur de protection A reçoit des paiements périodiques d'une prime payée par l'acheteur de protection en s'engageant, en contrepartie, à dédommager ce dernier en cas d'événement affectant la solvabilité de l'entité de référence Z émettrice de l'actif sous-jacent, dans notre cas une obligation. En effet, seule la prime périodique est payée dans le cadre de ce contrat tant qu'il n'y a pas d'occurrence de défaut. En cas d'événement de crédit, le vendeur de protection paiera la « perte en cas de défaut » (*Loss Given Default* (LGD)) sur l'obligation de référence. En plus de la possibilité de défaut de l'entité de référence, nous souhaitons tenir compte, dans notre modèle de pricing, de la possibilité de défaut de la contrepartie ou du vendeur de protection amenant à considérer un

⁴ In Carver L., CVA charge will hit sovereign exposures, *Risk Magazine*, July 2011.

CDS vulnérable. Dans ce cas, la prime est payée si et seulement si la contrepartie A et l'entité de référence Z survivent. En cas de défaut de ces deux entités, seule une fraction du montant dû, équivalente au taux de recouvrement de la contrepartie, est payée.

À la différence de Cherubini et Luciano (2001) qui supposent le paiement par anticipation de la prime et Luciano (2003) qui suppose, pour simplifier, que le paiement de la perte en cas de défaut ne survient qu'à la date d'expiration du contrat, nous admettons que le défaut peut survenir à n'importe quel moment avant l'échéance du contrat et que le paiement de la protection a lieu à la fin de chaque période de paiement de la prime (quelque soit la fréquence de ces paiements, trimestriels ou autres). En plus, nous supposons que le spread est payé à la fin de la période de paiement même si le défaut est survenu avant la fin de cette période. Ce cadre est plus fidèle à ce qui est pratiqué sur le marché.

Notons que les temps de défaut de A et de Z sont des temps d'arrêt définis dans un espace commun de probabilité $(\Omega, \sigma, \mathbf{P})$ avec une filtration F . Les informations accumulées dans F concernent aussi bien la solvabilité de l'assureur que celle de l'émetteur. En effet, concernant l'émetteur, il faut savoir s'il a fait défaut auparavant et quand exactement (*default monitoring*). Quant à l'assureur, l'étude de sa solvabilité est toujours assez complexe, que ce soit en temps normal ou en contexte de risques macroéconomiques. Le vendeur de protection étant un agent spécialisé, engagé dans de multiples transactions du même genre, sa solidité financière dépend (a) de sa compétence de gérant en temps normal (compétences dans l'ajustement actif-passif, couvertures, diversification du portefeuille d'assurés, etc.) et (b) de l'ensemble des risques des entreprises qu'il couvre donc de facteurs macroéconomiques. Mieux l'assureur calcule ses expositions, plus il est solvable. Les interactions entre ces différentes informations accumulées sur l'assureur et l'émetteur soulèvent plusieurs aspects de dépendance assez compliqués, sur lesquels doivent porter nos fonctions copules. Comme le contexte macroéconomique pèse lourdement et l'analyse de ces différents aspects de dépendance peut devenir extrêmement large, nous nous réduisons dans notre modèle à l'aspect de dépendance entre les risques de défaut émetteur – vendeur de protection.

Nous désignons par Q_i^Z la probabilité de survie de l'entité de référence Z au-delà du temps i et Q_i^A celle de la contrepartie A . Les probabilités de survie sont elles aussi adaptées à l'espace de probabilité filtré défini ci-dessus.

Ainsi, la valeur future de chaque paiement de la jambe de protection est donnée par

$$\left(\bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_i^A) - \bar{C}(Q_i^Z, Q_i^A)\right) LGD_Z + RR_A LGD_Z \left[\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) - \tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A)\right] \quad (1)$$

où LGD_j est la *Loss Given Default* de l'entité j est une probabilité conditionnelle au défaut, posée constante dans notre modèle et elle est égale à $1 - RR_j$, où RR_j est le taux de recouvrement de l'entité j supposé constant. Néanmoins, il faut noter que la détermination du taux de recouvrement est du même ordre de complexité que celle de la solvabilité du vendeur de protection, il dépend également de la gestion de l'assureur. Dans la plupart des études et sur le marché, on le pose déterministe ou stochastique, toutefois, c'est une variable clé très difficile à déterminer.

$\bar{C}(u, v)$ est une copule de survie représentant la probabilité jointe de survie, et les copules $\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A)$ et $\tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A)$ sont appelées « *flipped copulas* » dérivées des copules de survie comme suit :

$$\bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_i^A) = Q_{i-1}^Z - \tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) \quad (2)$$

$$\bar{C}(Q_i^Z, Q_i^A) = Q_i^Z - \tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) \quad (3)$$

L'équation (1) qui représente la valeur future de chaque paiement périodique de la jambe de protection correspond à la somme de la probabilité que Z fait défaut multipliée par la LGD_Z et la probabilité que A et Z font défaut multipliée par le taux de recouvrement de A et par la LGD_Z .

Dans les équations (2) et (3), nous appliquons le « *flipping principle* » comme suit : en gardant les mêmes notations et en partant d'une copule générale $C(u, v)$, les « *flipped copulas* » proviennent de

$$P(X < x) = P(X < x, Y < y) + P(X < x, Y > y)$$

en d'autres termes, ceci est équivalent à

$$1 - Q_i^Z = C(1 - Q_i^Z, 1 - Q_i^A) + \tilde{C}(1 - Q_i^Z, Q_i^A)$$

Dans notre cas, nous partons d'une copule de survie, ce qui se traduit ainsi

$$P(X > x) = P(X > x, Y < y) + P(X > x, Y > y)$$

ce qui équivaut à

$$Q_i^Z = \tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) + \bar{C}(Q_i^Z, Q_i^A)$$

qui n'est autre que l'équation (3). Le même raisonnement est valable pour l'équation (2).

Rappelons que l'usage des copules comme des probabilités jointes de survie dans l'évaluation du risque de contrepartie est basé sur l'hypothèse de non-arbitrage qui permet d'obtenir des bornes sur les prix du produit dérivé en question (*no-arbitrage pricing bounds*) et des résultats directement applicables aux modèles d'évaluation en marché incomplet comme le montrent Cherubini et Luciano (2002a, 2002b, 2003a, 2003b).

A la différence de Luciano (2003), nous reformulons le problème du pricing du CDS en termes de probabilité de survie et la raison pour laquelle nous avons fait appel à la copule de survie en lui appliquant le « *flipping principle* » est de récupérer la représentation générale de la formule de pricing d'un dérivé de crédit avec un risque de contrepartie. Effectivement, en substituant (2) et (3) dans (1), nous obtenons la représentation générale qui revient à Sorensen et Bollier (1994) qu'ils ont établie pour le pricing des swaps de taux d'intérêt et qu'on retrouve dans beaucoup de travaux récents traitant du risque de contrepartie. Brigo et Mercurio (2006) l'utilisent dans le cadre de leur formule générale du pricing des dérivés de crédit avec risque de contrepartie. Cette représentation appliquée au CDS correspond à la différence entre d'une part, le paiement de protection dans le cas d'un « *default free CDS* » ou CDS sans risque de contrepartie exprimé en termes de probabilité de survie et d'autre part, la probabilité jointe d'exercice du CDS et de défaut de la contrepartie (*joint probability of exercise of the product and default of the counterparty*). L'équation (1) s'écrit alors comme suit

$$\begin{aligned} & (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z - \left(\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) - \tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) \right) LGD_Z \\ & + RR_A LGD_Z \left[\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) - \tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) \right] = \end{aligned} \quad (4)$$

$$(Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z - (1 - RR_A) \left(\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) - \tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) \right) LGD_Z$$

et peut être réécrite ainsi

$$\left(Q_{i-1}^Z - Q_i^Z\right) LGD_Z - LGD_A LGD_Z \left(\tilde{C}\left(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A\right) - \tilde{C}\left(Q_i^Z, 1 - Q_i^A\right)\right) \quad (5)$$

où

$$\left(Q_{i-1}^Z - Q_i^Z\right) LGD_Z$$

est donc le paiement de la protection à la fin de chaque période de paiement de spread pour un CDS sans risque de contrepartie et

$$CVA = LGD_A LGD_Z \left(\tilde{C}\left(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A\right) - \tilde{C}\left(Q_i^Z, 1 - Q_i^A\right)\right) \quad (6)$$

est la *Credit Valuation Adjustment*. Notons que les deux copules de la différence ne doivent pas être forcément les mêmes mais la différence ne doit pas être non plus positive ni nulle donc probablement, il doit y avoir un lien de type « *convolution copula* »⁵ sur lequel travaillent actuellement un nombre de professeurs à l'Université de Bologna – Italie dont U. Cherubini, F. Gobbi, S. Romagnoli et S. Mulinacci. Des exposés de leur travail sur ce thème ont été présentés lors des séminaires de Harvard et de Yale fin mars 2011.

Dans ce qui précède, nous nous sommes intéressés à la jambe de protection du CDS vulnérable. Nous nous soucions à présent de calculer les paiements de la jambe de prime. Étant donné les notations utilisées auparavant, la valeur future de chaque paiement périodique de la prime est

⁵ Après une discussion de notre modèle avec Monsieur le Professeur Umberto Cherubini, il nous a révélé que la relation entre les deux copules liant les probabilités de survie à différents moments pourra générer des limites à notre modèle de pricing et que ce lien est en cours d'étude actuellement par l'équipe de recherche que nous avons citée ci-dessus. Toutefois, il nous a recommandé de considérer, dans un premier temps, que les copules de la différence dans l'équation (6) sont les mêmes. Il faut noter que cette question des copules et des probabilités de survie à différents moments dépend essentiellement des informations accumulées dans la filtration F .

$$W\bar{C}(Q_i^Z, Q_i^A)$$

où W est la valeur de la prime ou du spread payé dans le cadre du CDS.

Les paiements de chaque jambe sont alors actualisés et cumulés puis égalisés de façon à obtenir la valeur de W qui tient compte du risque de contrepartie.

Nous notons B_i le taux d'actualisation, il correspond au prix au temps 0 d'une obligation zéro coupon sans risque de maturité i . Il est déterminé par $B_i = \exp(-r_i \times i)$ où r_i est le taux sans risque de maturité i . Nous supposons que r_i est indépendant des événements de défauts. L'égalisation des deux jambes actualisées et cumulées jusqu'à la date d'échéance du contrat N du CDS nous conduit à

$$W \sum_{i=1}^N B_i \bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_{i-1}^A) = \sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z - \sum_{i=1}^N LGD_A LGD_Z B_i (\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) - \tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A)) \quad (7)$$

Par conséquent, la formule théorique de pricing du spread du CDS est la suivante

$$W = \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z - \sum_{i=1}^N LGD_A LGD_Z B_i (\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) - \tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A))}{\sum_{i=1}^N B_i \bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_{i-1}^A)} \quad (8)$$

Nous nous arrêtons dans ce qui suit sur le comportement de la prime du CDS à l'égard de la dépendance entre les risques de défaut de la contrepartie et de l'entité de référence. Nous comparerons son comportement avec celui de la prime d'un CDS non vulnérable puis nous spécifions ce comportement en considérant une copule mixte qui nous permettra d'obtenir des formules de pricing encadrées (*closed form prices*) dans les cas de dépendance extrême.

2.2. Étude de sensibilité de la prime dans les cas de dépendance extrême

Nous rappelons que dans les cas de dépendance extrême, plus explicitement le cas de dépendance positive parfaite, celui de dépendance négative parfaite et le cas d'indépendance, la copule se réduit respectivement à la copule minimum, la copule maximum et la copule produit. Comme le montrent de nombreux travaux et qu'on retrouve dans Luciano (2003),

dans ces cas de dépendance extrême, même la copule de survie coïncide avec la copule minimum, maximum ou copule produit selon le cas de dépendance.

Considérons à présent le cas de dépendance positive parfaite entre le risque de contrepartie et celui de l'entité de référence, la copule de survie coïncide avec $C^+(u, v) = \min(u, v)$, les « *flipped copulas* » sont égales à

$$\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) = Q_{i-1}^Z - \min(Q_{i-1}^Z, Q_i^A) = \max(Q_{i-1}^Z - Q_i^A, 0)$$

$$\tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) = Q_i^Z - \min(Q_i^Z, Q_i^A) = \max(Q_i^Z - Q_i^A, 0)$$

Dans ce cas, la prime dénotée W^+ sera égale à

$$W^+ = \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z - \sum_{i=1}^N LGD_A LGD_Z B_i (\max(Q_{i-1}^Z - Q_i^A, 0) - \max(Q_i^Z - Q_i^A, 0))}{\sum_{i=1}^N B_i \min(Q_{i-1}^Z, Q_{i-1}^A)}$$

Logiquement, nous sommes amenés à penser que le vendeur de protection, jouant un rôle d'assureur et supposons qu'il gère bien ses risques face à une multiplicité d'assurés, il doit avoir une qualité de crédit meilleure. Mieux il calcule ses primes, plus il est solvable. Donc nous supposons qu'il présente une probabilité de défaut inférieure à celle de l'entité de référence pour laquelle on achète la protection. Nous rappelons que ceci reste vrai hors contexte macroéconomique ou risque systémique. Par conséquent, nous supposons sans perte de généralité que la probabilité de survie de A est supérieure à celle de Z . Nous remarquons alors que la prime en cas de dépendance positive parfaite ne dépend ni de LGD_A ni de Q^A puisqu'elle se réduit à

$$W^+ = \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z}{\sum_{i=1}^N B_i Q_{i-1}^Z} \quad (9)$$

En cas d'association positive parfaite entre A et Z où leurs risques sont positivement corrélés, le risque de Z pouvant impacter directement la solvabilité de A , que la contrepartie n'ait aucun impact sur le prix du CDS est un résultat très surprenant mais non inexplicable.

Nous rappelons ce qu'on a évoqué précédemment concernant la remarque de M. Cherubini sur le lien entre les copules liant les probabilités de survie à des moments différents. En effet, il semble que ces deux copules ne puissent pas être étudiées indépendamment. De plus, nous remarquons que, dans notre modèle, un cas d'étude est omis. Il s'agit de la possibilité de défaut de la contrepartie alors que l'entité de référence survit toujours. C'est un cas très rare mais qui semble influencer notre évaluation en cas de dépendance positive parfaite. En effet, si une telle situation se présente, l'exposition au défaut de la contrepartie sera le coût de substitution ou de compensation du CDS qui pourra être calculée comme une CD Swaption (*Credit Default Swaption* ou *Credit Default Option*) selon l'approche de Sorensen et Bollier (1994) dans l'évaluation des *Swap Credit Risk*, laquelle est reprise par Cherubini (2004) pour le pricing des mêmes produits par les copules.

En cas de dépendance négative parfaite, la copule de survie coïncide avec la borne inférieure de Fréchet,

$C^-(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ donc $\bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_{i-1}^A) = \max(Q_{i-1}^Z + Q_{i-1}^A - 1, 0)$, les « *flipped copulas* » selon les équations (2) et (3) sont égales à

$$\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) = Q_{i-1}^Z - \max(Q_{i-1}^Z + Q_i^A - 1, 0)$$

$$\tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) = Q_i^Z - \max(Q_i^Z + Q_i^A - 1, 0)$$

Comme dans Luciano (2003), nous estimons que, sans perte de généralité, la somme des probabilités de défaut de *A* et de *Z* est inférieure à 1. Par conséquent, la somme des probabilités de survie de ces deux entités doit être supérieure à 1, ce qui se traduit par

$$\bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_{i-1}^A) = Q_{i-1}^Z + Q_{i-1}^A - 1$$

$$\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) = 1 - Q_i^A$$

$$\tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) = 1 - Q_i^A$$

Substituant les valeurs des copules dans la formule de W , la prime dénotée W^- sera donnée par

$$W^- = \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z}{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z + Q_{i-1}^A - 1)} \quad (10)$$

Nous constatons donc que cette fois-ci, la contrepartie intervient dans le calcul de la prime à travers Q_{i-1}^A donc elle a un impact sur le calcul du spread. Si la contrepartie vendant la protection est dotée d'une bonne qualité de crédit donc une probabilité de survie plus élevée, le contrat CDS revient moins cher à l'acheteur de protection parce qu'elle ne risque pas de faire défaut au même moment que l'entité de référence vu la dépendance négative entre leurs risques de défaut. Ceci est un résultat qui confirme ce qu'on est amené à penser intuitivement en choisissant la contrepartie avec laquelle on souhaite contracter un CDS.

Autrement, il faut souligner que dans un contexte de risque systémique, par exemple, la somme des probabilités de défaut de A et de Z est supérieure à 1 donc la somme de leurs probabilités de survie est inférieure à 1. La prime W^- tendra vers l'infini dans ce dernier cas.

En cas d'indépendance totale entre A et Z , la copule de survie coïncide avec la copule produit $C^\perp(u, v) = uv$ donc $\bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_{i-1}^A) = Q_{i-1}^Z Q_{i-1}^A$ et les « *flipped copulas* » correspondent à

$$\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) = Q_{i-1}^Z - Q_{i-1}^Z Q_i^A = Q_{i-1}^Z (1 - Q_i^A)$$

$$\tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) = Q_i^Z - Q_i^Z Q_i^A = Q_i^Z (1 - Q_i^A)$$

Par conséquent, la prime en cas d'indépendance dénotée W^\perp est calculée ainsi

$$W^\perp = \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z - \sum_{i=1}^N LGD_A LGD_Z B_i (1 - Q_i^A) (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z)}{\sum_{i=1}^N B_i Q_{i-1}^Z Q_{i-1}^A} \quad (11)$$

À ce stade, il serait intéressant d'étudier la prime du CDS vulnérable (étudiée en soi dans ce qui précède) en comparaison avec celle du CDS considéré sans risque de contrepartie et ceci toutes choses étant égales par ailleurs. Désignons la prime du CDS non vulnérable par W_{NV} . On peut l'obtenir à partir de l'équation (8) en remplaçant la probabilité de survie de la contrepartie Q^A par 1 puisque cette dernière ne peut pas faire défaut. Nous exploitons également les propriétés de la copule quand ses arguments tendent vers zéro ou 1, plus explicitement si $C(u, v)$ est une copule, pour tout u et $v \in [0, 1]$,

$$C(0, v) = C(u, 0) = 0$$

et

$$C(u, 1) = u, \quad C(1, v) = v$$

Donc ayant $Q_i^A = Q_{i-1}^A = 1$ et $LGD_A = 0$, la CVA est évidemment nulle et la prime du CDS non vulnérable sera évaluée comme suit

$$W_{NV} = \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z}{\sum_{i=1}^N B_i Q_{i-1}^Z} \quad (12)$$

On retrouve la valeur de la prime du CDS vulnérable en cas de dépendance positive parfaite qui s'est avérée totalement indépendante de la qualité du crédit de la contrepartie (étant donné les limites du modèle que nous avons évoquées le cas échéant).

Afin de comparer les deux primes, nous étudions la différence $W_{NV} - W$ qui représente la vulnérabilité du CDS. Luciano (2003) la considère aussi comme la prime de risque de la contrepartie.

Considérant de nouveau les différents cas de dépendance extrême entre la contrepartie et l'entité de référence, nous aboutissons à un certain nombre de résultats qui nous permettront d'établir le comportement de $W_{NV} - W$ dans chacun de ces cas, utilisant les valeurs de W^+ , W^- et W^\perp calculées ci-dessus.

En cas de dépendance positive parfaite, en prenant en considération la borne supérieure de Fréchet pour les copules, la différence entre les deux primes s'avère être nulle comme la prime

du CDS non vulnérable rejoint celle du CDS comprenant un risque de contrepartie (comme le montre l'équation (12) et (9)). Nous avons donc

$$W_{NV} - W^+ = 0 \quad (13)$$

Ceci est une conséquence inhérente aux limites du modèle décelées dans le cas de dépendance positive parfaite. Le modèle initial de Luciano (2003) montre que la différence $W_{NV} - W$ qu'elle a désignée comme étant la prime de risque de la contrepartie est positive.

En cas de dépendance négative parfaite, cette fois-ci, nous considérons la borne inférieure de Fréchet pour le calcul de la copule, nous constatons que la différence $W_{NV} - W^-$ est égale à

$$W_{NV} - W^- = \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z}{\sum_{i=1}^N B_i Q_{i-1}^Z} - \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z}{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z + Q_i^A - 1)}$$

donc

$$W_{NV} - W^- = \sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z \left(\frac{1}{\sum_{i=1}^N B_i Q_{i-1}^Z} - \frac{1}{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z + Q_i^A - 1)} \right) \quad (14)$$

C'est évident que $Q_i^A - 1 < 0$ alors $\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z + Q_i^A - 1) < \sum_{i=1}^N B_i Q_{i-1}^Z$, nous pouvons donc conclure que $W_{NV} - W^-$ est négative, ce qui rejoint le résultat de Luciano (2003) qu'elle explique de la façon suivante : c'est un résultat qui s'oppose à l'intuition spontanée selon laquelle on est amené à penser que la prime payée dans le cadre d'un CDS non vulnérable est supérieure à celle d'un CDS vulnérable. En fait, au cas où la contrepartie fait défaut, l'acheteur de protection arrête de payer la prime. Dans le cas de dépendance négative, ceci rend le contrat du CDS vulnérable encore plus cher que celui ne comprenant pas un risque de contrepartie.

En cas d'indépendance, nous avons

$$W_{NV} - W^\perp = \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z}{\sum_{i=1}^N B_i Q_{i-1}^Z} - \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z - \sum_{i=1}^N LGD_A LGD_Z B_i (1 - Q_i^A) (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z)}{\sum_{i=1}^N B_i Q_{i-1}^Z Q_{i-1}^A} \quad (15)$$

Sa valeur et son signe dépendent de l'interaction entre les valeurs des différentes variables de l'équation relatives à la contrepartie ainsi qu'à l'entité de référence.

2.3. Copule mixte et pricing du CDS vulnérable

La copule mixte a été introduite par Konijn (1959), discutée longuement par Hurlimann (2003) et utilisée dans plusieurs applications en finance au risque de crédit depuis Li (2000) et plus récemment dans Li (2006) qui présente une nouvelle approche de pricing d'un CDO basée sur un modèle de copule gaussienne mixte. Elle est privilégiée pour les *closed form prices* qu'elle permet d'obtenir et parce qu'elle dépend d'un seul paramètre qui est directement lié à des coefficients de dépendance non paramétriques comme le tau de Kendall et le rho de Spearman.

La copule mixte est définie en termes des copules minimum, maximum et copule produit, des combinaisons linéaires de ces dernières permettent d'obtenir la classe des copules mixtes.

Ainsi pour modéliser une dépendance positive, elle se présente comme suit

$$C(u, v) = (1 - \alpha)C^\perp + \alpha C^+ \quad \text{pour } 0 \leq \alpha \leq 1$$

et pour une dépendance négative

$$C(u, v) = (1 + \alpha)C^\perp - \alpha C^- \quad \text{pour } -1 \leq \alpha \leq 0$$

En variant le paramètre α , on peut alors explorer de larges cas de dépendance positive (pour $\alpha > 0$) et négative (pour $\alpha < 0$). Ce paramètre est lié au tau de Kendall par la relation suivante

$$\tau = \begin{cases} \alpha(\alpha + 2)/3 & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \alpha(2 - \alpha)/3 & -1 \leq \alpha \leq 0 \end{cases}$$

et au rho de Spearman (que nous allons adopter dans notre étude) par l'égalité suivante

$$\rho_s = \alpha$$

La copule mixte a encore l'avantage de coïncider avec sa copule de survie puisqu'elle est exprimée en fonction des copules extrêmes (minimum, maximum et produit) qui elles coïncident avec leurs copules de survie. Par conséquent comme $\bar{C} = C$ pour C^+ , C^- et C^\perp , c'est valable également pour la copule mixte

$$\bar{C}(u, v) = C(u, v)$$

Comme nous l'avons montré dans la section précédente, dans les cas de dépendance extrême, nous avons obtenu des *closed form prices* pour l'évaluation de la prime ou du spread. La copule mixte nous le permet aussi pour tout niveau de dépendance ρ_s .

Ainsi, en adoptant la copule mixte, en cas de dépendance positive, nous avons

$$\begin{aligned} \bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_{i-1}^A) &= C(Q_{i-1}^Z, Q_{i-1}^A) \\ &= Q_{i-1}^Z [(1 - \rho_s) Q_{i-1}^A + \rho_s] \end{aligned}$$

et les « *flipped copulas* » correspondent à

$$\begin{aligned} \tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) &= Q_{i-1}^Z - \bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_i^A) \\ &= (1 - \rho_s) Q_{i-1}^Z (1 - Q_i^A) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) &= Q_i^Z - \bar{C}(Q_i^Z, Q_i^A) \\ &= (1 - \rho_s) Q_i^Z (1 - Q_i^A) \end{aligned}$$

Par conséquent, la prime en cas de dépendance positive est déterminée par

$$W = \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z - \sum_{i=1}^N LGD_A LGD_Z B_i (1 - \rho_s) (1 - Q_i^A) (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z)}{\sum_{i=1}^N B_i Q_{i-1}^Z [(1 - \rho_s) Q_{i-1}^A + \rho_s]} \quad (16)$$

Pour prendre en considération une dépendance négative entre la contrepartie et l'entité de référence avec le choix d'une copule mixte, donc pour $-1 \leq \alpha \leq 0$, nous procédons comme suit

$$\begin{aligned}\bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_{i-1}^A) &= C(Q_{i-1}^Z, Q_{i-1}^A) \\ &= Q_{i-1}^Z \left[(1 + \rho_s) Q_{i-1}^A - \rho_s \right] + \rho_s (1 - Q_{i-1}^A)\end{aligned}$$

et les « *flipped copulas* » sont égales à

$$\begin{aligned}\tilde{C}(Q_{i-1}^Z, 1 - Q_i^A) &= Q_{i-1}^Z - \bar{C}(Q_{i-1}^Z, Q_i^A) \\ &= Q_{i-1}^Z \left[1 - (1 + \rho_s) Q_i^A + \rho_s \right] - \rho_s (1 - Q_i^A)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{C}(Q_i^Z, 1 - Q_i^A) &= Q_i^Z - \bar{C}(Q_i^Z, Q_i^A) \\ &= Q_i^Z \left[1 - (1 + \rho_s) Q_i^A + \rho_s \right] - \rho_s (1 - Q_i^A)\end{aligned}$$

Par conséquent, la prime en cas de dépendance négative est déterminée par

$$W = \frac{\sum_{i=1}^N B_i (Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) LGD_Z - \sum_{i=1}^N LGD_A LGD_Z B_i \left[(Q_{i-1}^Z - Q_i^Z) \left[1 - (1 + \rho_s) Q_i^A + \rho_s \right] - \rho_s (1 - Q_i^A) \right]}{\sum_{i=1}^N B_i \left[Q_{i-1}^Z \left[(1 + \rho_s) Q_{i-1}^A - \rho_s \right] + \rho_s (1 - Q_{i-1}^A) \right]} \quad (17)$$

Dans la section suivante, nous examinerons graphiquement le comportement de la prime du CDS vulnérable tenant compte de la CVA et évaluée avec la copule mixte, ainsi que sa réaction aux changements de la qualité de crédit.

3. Application numérique

L'application du pricing du CDS vulnérable que nous proposons dans cette section est basée sur des données financières collectées sur Moody's et Bloomberg, cela concerne en particulier des spreads de crédit pour des *ratings* donnés et des taux de recouvrement.

Afin de pouvoir comparer les résultats de notre version avec celle de Luciano (2003), nous nous alignons aux paramètres et données qu'elle a utilisés, datant de 2003. Il s'agit du choix

des ratings des entités entrant en jeu dans le contrat de CDS, de leurs taux de recouvrement, des spreads de taux et le taux sans risque en vigueur à cette date.

Plus explicitement, nous considérons un contrat CDS sur cinq ans où le vendeur de protection est désigné A et l'entité de référence pour laquelle la protection est achetée Z . En juin 2003, la dette de A était non garantie de premier rang (*Senior Unsecured Debt*) et notée A+ par *Standard and Poor's*, de même pour Z mais elle était notée BBB+ par la même agence de notation. L'estimation de Moody's du taux de recouvrement pour les dettes non garanties de premier rang était de 48,84% donc les deux entités A et Z , ayant le même type de dette, avaient une perte en cas de défaut ou LGD de 51,16%.

Pour estimer la probabilité de survie de chacune des deux entités en question⁶ sur un horizon de cinq ans, nous considérons la courbe des taux qui correspond à leurs *ratings* et à celui des obligations sans risque notées AAA. Le spread de taux est donc défini comme étant la différence $r_i^j - r_i$ où r_i^j est le taux de rendement de l'entité j à la maturité ou à l'échéance i et r_i , comme nous l'avons défini auparavant, est le taux sans risque de maturité i . Pour ce dernier, nous considérons comme Luciano (2003) celui du *rating* AAA au lieu de celui des Bons de Trésor. L'auteur de l'article justifie son choix par l'avis de Duffie et Singleton (2003) qui stipule que l'avantage de ne pas recourir aux rendements des Bons de Trésor est d'atténuer l'effet de la prime de liquidité associée aux *Treasuries*⁷ sur la plupart des sociétés.

Nous supposons que A et Z ont coté des obligations zéro coupon B_i^j , $j = A, Z$ de maturité i . Ces obligations sont soumises au risque de crédit. Nous admettons que le taux de recouvrement de l'entité j , RR_j , est déterministe et constant⁸ sur la période du contrat jusqu'à l'échéance. L'hypothèse de non arbitrage, sur laquelle est basée notre évaluation du CDS par les copules, nous permet d'énoncer le lien suivant entre les obligations zéro coupon à risque B_i^j et celle sans risque B_i :

⁶ Alors que Luciano (2003) modélise l'évaluation du CDS en fonction des probabilité de défaut, notre reformulation du problème de pricing fait appel aux probabilités de survie puisque nous recourons à la formule générale du pricing des dérivés de crédit comprenant un risque de contrepartie qui est la plus fidèle aux pratiques du marché.

⁷ Nom qui désigne les obligations d'État du Trésor Américain.

⁸ Dans le cadre de notre étude, nous continuons à considérer un taux de recouvrement déterministe et constant. Toutefois, ce sera bien entendu un des affinements majeurs que nous souhaiterions apporter à notre modèle dans le futur. Nous approcherions la dépendance entre les taux de recouvrements des différentes entités concernées (donc leurs LGD) par la copule.

$$B_i^j = \begin{cases} RR_j B_i & (1 - Q_i^j) \\ B_i & Q_i^j \end{cases}$$

donc

$$B_i^j = (1 - Q_i^j) RR_j B_i + Q_i^j B_i$$

où Q_i^j est la probabilité de survie (risque-neutre) de l'entité j au temps i , sachant les informations au temps 0, $Q_i^j = \Pr(i_j > i | F_0)$. Pour notre application numérique, nous calculons cette probabilité de la façon suivante :

$$Q_i^j = \frac{B_i^j - B_i RR_j}{B_i (1 - RR_j)} \quad (18)$$

En remplaçant dans l'équation (18) l'expression de $B_i = \exp(-r_i \times i)$ et celle équivalente pour B_i^j , $B_i^j = \exp(-r_i^j \times i)$, la probabilité de survie risque-neutre Q_i^j sera déterminée ainsi

$$Q_i^j = \frac{\exp(-(r_i^j - r_i) \times i) - RR_j}{(1 - RR_j)} \quad (19)$$

En appliquant la formule précédente aux données de juin 2003, nous obtenons les probabilités de survie risque-neutre marginales que nous recueillons dans le tableau suivant

Maturité	A	Z
1	0,9929	0,9907
2	0,9871	0,9774
3	0,978	0,9647
4	0,9704	0,9442
5	0,959	0,9287

Notons, toutefois, que ces probabilités de survie pourraient être calculées simplement à partir des matrices de transition de *rating* de Bâle qui fournissent aussi bien les probabilités de survie que celles du changement de *rating* sur un horizon d'un an.

Concernant les probabilités de survie jointes, nous considérons une copule mixte avec le rho de Spearman ρ_s comme coefficient de corrélation entre les risques de crédit des deux entités concernées. Dans notre application numérique, nous évaluons le rho de Spearman en fonction de son équivalence avec le coefficient de corrélation linéaire ρ . Ce dernier étant égal à 0,5401, $\rho_s = 0,5222$ comme $\rho_s = \frac{6}{\pi} \arcsin \frac{\rho}{2}$. Comme ρ_s est positif, la copule mixte est égale donc à $C(u, v) = (1 - 0,5222)C^\perp + 0,5222C^+$. En remplaçant dans l'équation (3.16) les variables par leurs valeurs, nous obtenons une prime du CDS cinq ans vulnérable $W = 0,2219$ points de base. La valeur de la prime du CDS non vulnérable correspond à $W_{NV} = 0,2222$ points de base. Elle est légèrement supérieure à celle du CDS vulnérable. Leur différence mesure la vulnérabilité du contrat CDS, soit 0,003 points de base.

Comme nous l'avons évoqué auparavant, nous sommes intéressés d'examiner graphiquement le comportement de la prime du CDS vulnérable et l'effet de l'intégration de la CVA avec le choix de la copule mixte. Pour ce, nous permettons au rho de Spearman de varier de -1 à 1 dans les formules (16) et (17). Les résultats sont représentés sur le graphique 1⁹. En effet, nous remarquons qu'avec le choix de la copule mixte, la prime du CDS tenant compte de la CVA est inférieure à celle du CDS non vulnérable dans les cas de dépendance négative et positive, le contrat du CDS vulnérable étant beaucoup moins cher dans le cas de dépendance négative. Ceci est conforme à l'intuition qu'on a sur les marchés financiers.

Si les valeurs des deux primes semblent très proches dans le cas de dépendance positive, cela est expliqué par les limites du modèle évoquées plus loin. Normalement, plus la dépendance est positive entre les deux entités, plus la différence entre les deux primes doit s'élargir. En effet, même si on ne le voit pas clairement sur le graphique 1, les deux primes ne se croisent pas et la différence s'élargit avec un ρ_s qui tend vers 1. Toutefois, la différence n'est pas énorme comme on pourrait s'y attendre.

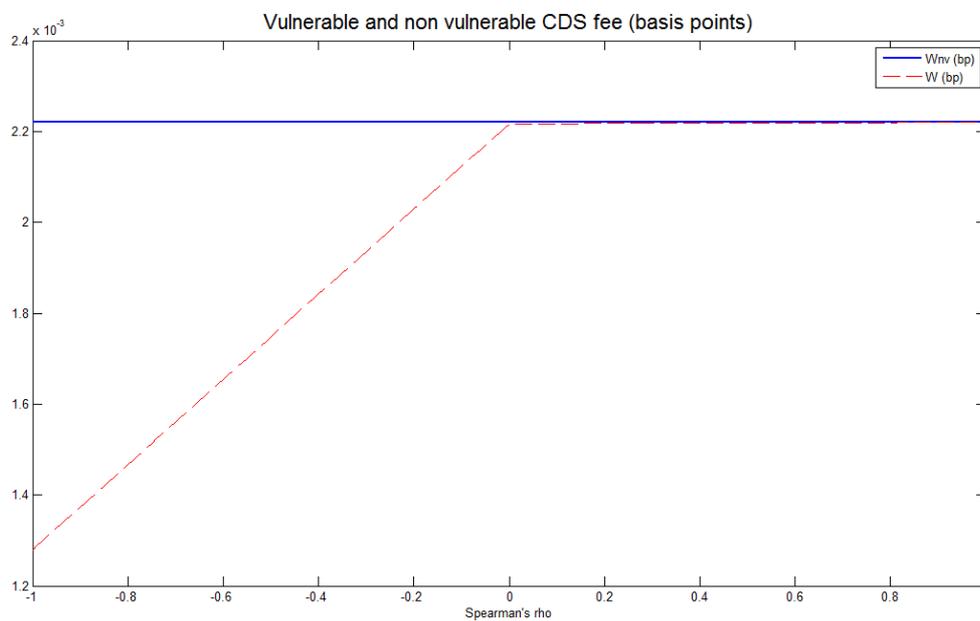
Nos résultats rejoignent ceux de Luciano (2003) pour des valeurs de ρ_s à partir de (-0,4) où la prime du CDS vulnérable reste inférieure à celle du CDS non vulnérable $W < W_{NV}$ mais pour

⁹ Le calibrage du modèle est réalisé sur Matlab 7.8.0 (R2009a).

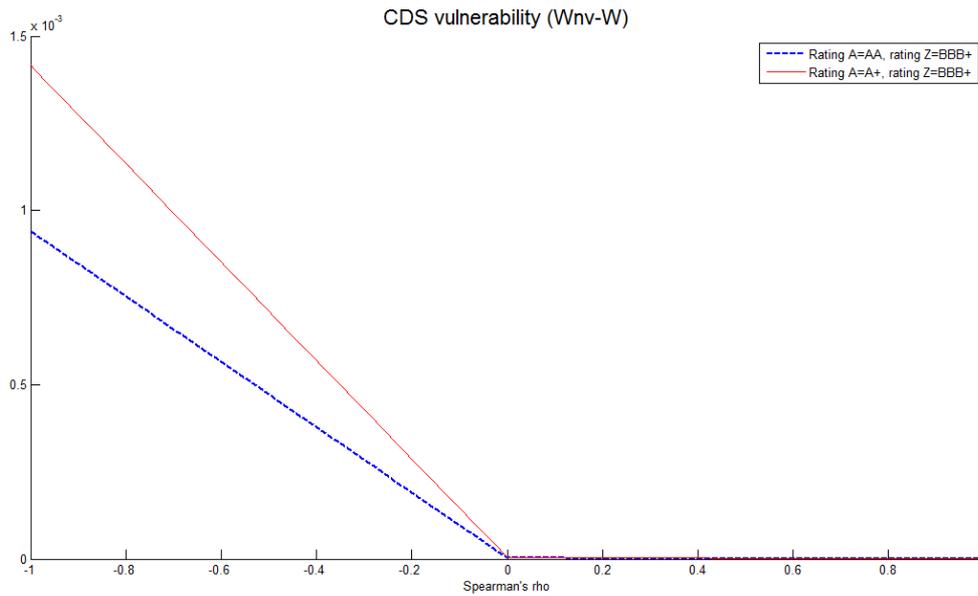
des cas de dépendance positive, la prime du CDS vulnérable décroît plus rapidement que dans notre modèle.

Nous nous intéressons également à étudier le comportement de $W - W_{NV}$ mesurant la vulnérabilité du contrat CDS ou l'effet de l'intégration de la CVA dans le calcul du spread, vis à vis d'un changement du rating du vendeur de protection. Nous comparons notre cas d'origine où la contrepartie A a un rating A+ avec celui où A a un rating meilleur, par exemple AA. Nous avons récupéré les spreads AA-AAA sur Moody's pour la période en question et nous avons calculé les probabilités de survie risque-neutre marginales afin de calculer la prime du CDS vulnérable tenant compte de ce changement de rating. Le graphique 2 montre le comportement de $W - W_{NV}$ face à ce changement de notation.

Comme dans Luciano (2003), la différence des deux primes avec un rating amélioré AA est inférieure à celle calculée pour un rating A+ du vendeur de protection quelque soit le rang de corrélation. Ceci reste intuitif puisque le CDS revient plus cher quand l'assureur a une meilleure qualité de crédit rendant la différence $W - W_{NV}$ pour AA inférieure à celle pour A+.



Graphique 1: Primes du CDS vulnérable (W) et du CDS non vulnérable (W_{nv})



Graphique 2: Vulnérabilité du CDS – changement du rating de l'assureur

4. Conclusion

D'un point de vue théorique, nous avons montré que la prime d'un CDS vulnérable peut être supérieure à celle d'un CDS sans risque de contrepartie dans le cas de dépendance négative parfaite (contrairement à l'intuition générale sur les marchés financiers), inférieure en cas de dépendance positive parfaite¹⁰ et peut être inférieure ou supérieure dans le cas d'indépendance. Le choix de la copule mixte nous a permis des formules encadrées dans l'évaluation de la prime.

Du point de vue pratique, notre application numérique (pour les probabilités de survie marginales calculées à partir des courbes de taux correspondantes) nous a montré que la prime d'un CDS vulnérable est en général inférieure à celle d'un CDS sans risque de contrepartie quelque soit le rang de corrélation. La prise en compte de la CVA révisé donc les prix des CDS à la baisse.

Afin d'améliorer davantage l'apport de ce modèle de pricing du CDS, nous souhaitons, dans l'avenir, l'affiner en étudiant de plus près le lien entre les copules des probabilités de survie à différents moments. Ce lien n'étant pas étudié, a influencé notre valorisation du CDS en cas de dépendance positive parfaite. Nous prendrons également en considération, dans

¹⁰ Etant donné les limites rencontrées dans ce cas de dépendance, nous avons obtenu une égalité entre les deux primes donc une différence $W - W_{NV}$ nulle.

notre pricing, le cas (même rare) du défaut du vendeur de protection alors que l'entité de référence continue à survivre. Toutefois, notre apport majeur sera d'intégrer un taux de recouvrement stochastique qui rendra notre modèle plus pertinent et adaptera le pricing au cadre de Bâle III et aux pratiques du marché. Dans ce dernier cas, il serait intéressant de capturer la dépendance entre les taux de recouvrement des deux entités et donc de leurs LGD par les copules, de même pour la dépendance entre la LGD et la probabilité de survie de l'entité concernée.

Bibliographie

Black F. & Scholes M. (1973) : The Pricing of Options and Corporate Liabilities, *Journal of Political Economy*, 81, 637-654.

Brigo D. & Capponi A. (2008) : Bilateral counterparty risk valuation with stochastic dynamical models and application to Credit Default Swaps, *Working Paper*, Cornell University Library.

Brigo D. & Mercurio F. (2006) : *Interest Rate Model - Theory and Practise: with Smile Inflation and Credit*, Springer Verlag, Second Edition.

Bruyère R., Cont R., Copinot R., Jaeck C., Féry L. & Spitz T. (2004) : *Les Produits Dérivés de Crédit*, Economica.

Canabarro E. & Duffie D. (2003) : Measuring and Marking Counterparty Risk, Chapter 9 of *Asset/Liability Management of Financial Institutions*, Euromoney Books.

Carver L. (2011) : CVA Charge will Hit Sovereign Exposures, *Risk Magazine*.

Cherubini U. (2004) : Pricing Swap Credit Risk with Copulas, *Working Paper*, SSRN, University of Bologna.

Cherubini U. & Luciano E. (2001) : Multivariate Option Pricing with Copulas, *Working Paper*, EFMA 2001 Lugano Meetings.

Cherubini U. & Luciano E. (2002a) : Bivariate Option Pricing with Copulas, *Applied Mathematical Finance*, 9(2), 69-85.

Cherubini U. & Luciano E. (2002b) : Pricing and Hedging Vulnerable Credit Derivatives with Copulas, *Working Paper*, University of Bologna and University of Turin.

Cherubini U. & Luciano E. (2003a) : Pricing and Hedging Credit Derivatives with Copulas, *Economic Notes*, 32, 219-242.

Cherubini U. & Luciano E. (2003b) : Pricing Vulnerable Options with Copulas, *Journal of Risk Finance*, 5(1), 27-39.

Cherubini U., Mulinacci S. & Romagnoli S. (2011) : A Copula-Based Model of Speculative Price Dynamics in Discrete Time, *Journal of Multivariate Analysis*, 102 (6), 1047-1063.

Cherubini U. & Romagnoli S. (2009) : Computing Copula Volume in n Dimensions, *Applied Mathematical Finance*, 16(4), 307-314.

De Prisco B. & Rosen D. (2005) : Modelling Stochastic Counterparty Credit Exposures for Derivatives Portfolios, Chapter 1 of *Counterparty Credit Risk Modelling: Risk Management, Pricing and Regulation*, Edited By Michael Pykhtin, RISK Books, London.

Duffie D. & Singleton K.J. (2003) : *Credit Risk*, *Princeton Series in Finance*, Princeton University Press, Princeton.

Embrechts P., McNeil A. & Strauman D. (1999) : Correlation and Dependency in Risk Management: Properties and Pitfalls, *Working Paper*, Departement of Mathematik, ETHZ, Zurich.

Embrechts P., Lindskog F. & McNeil A. (2003) : Modeling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management, in *Handbook of Heavy Tailed Distribution in Finance*, Elsevier, 331-385.

European Central bank (2009) : Credit Default Swaps and Counterparty Credit Risk, <http://www.ecb.int/pub/pdf/other/creditdefaultswapsandcounterpartyrisk2009en.pdf>.

Gibson M. (2005) : Measuring Counterparty Credit Exposure to a Margined Counterparty, Chapter 2 of *Counterparty Credit Risk Modelling : Risk Management, Pricing and Regulation*, Edited By Michael Pykhtin, RISK Books.

Giesecke K. (2004) : Correlated Default with Incomplete Information, *Journal of Banking and Finance*, 28, 1521-1545.

Gregory J. (2009) : Being two-faced over Counterparty Credit Risk, *Risk*, 22 (2), 86-90.

Hougaard P. (1986) : A Class of Multivariate Failure Time Distributions, *Biometrika*, 73, 671-678.

Hürlimann W. (2001a) : Fitting Bivariate Cumulative Returns with Copulas, *Working Paper*, Winterthur Life and Pensions.

Jouanin J. F., Rapuch G., Riboulet G. & Roncalli T. (2001) : Modelling Dependence for Credit Derivatives with Copulas, *Working Paper*, Groupe de Recherche Opérationnelle, Crédit Lyonnais, France.

Konijn H.S. (1959) : Positive and Negative Dependence of Two Random Variables, *Sankhyà*, 21, 269-80.

Li D. X. (2000) : On Default Correlation : a Copula Function Approach, *Journal of Fixed Income*, 9(4), 43-54.

Li D. X. & H. Liang M. (2006) : CDO Squared Pricing Using Gaussian Mixture Model with Transformation of Loss Distribution, *Working Paper*, SSRN.

Lipton A. & Sepp A. (2009) : Credit Value Adjustment for Credit Default Swaps via the Structural Default Model, *Journal of Credit Risk*, 5(2), 123-146.

Luciano E. (2003) : Vulnerable Credit Default Swaps and First to Default : a Mixture Copula Approach, *Working Paper*, International Center of Economic Research.

Luciano E. & Semeraro P. (2010) : Multivariate Variance Gamma and Gaussian Dependence : a Study with Copulas, in *Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance*, Ed. by M. Corazza and R. Pizzi, Springer Verlag.

Pykhtin M. (2011) : Counterparty Risk Capital and CVA, *Risk Magazine*.

Quignon L. (2011) : Bâle III n'aura peut-être pas les vertus de la lance d'Achille, Recherche économique BNP Paribas, *Conjoncture*, 3-28.

Redon C. (2006) : Wrong Way Risk Modelling, *Risk magazine*.

Schönbucher P. J. & Schubert D. (2001) : Copula-Dependent Default Risk in Intensity Models, *Working Paper*, Department of Statistics, Bonn University.

Sklar A. (1959) : Fonctions de Répartition à n Dimensions et leurs Marges, *Publications de l'Institut de Statistique de Paris*, 8, 229-231.

Sorensen E. & Bollier T. (1994) : Pricing Swap Default Risk, *Financial Analysts Journal*, 50 (3), 23-33.

Zhu S. and Pykhtin M. (2007) : A Guide to Modeling Counterparty Credit Risk, *GARP Risk Review*, SSRN.